MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, MAX BORN, L. E. J. BROUWER, RICHARD COURANT, CONSTANTIN CARATHÉODORY, WALTHER V. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR V. KÁRMÁN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER, ARNOLD SOMMERFELD

HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN
IN GÖTTINGEN

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN
IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN.

84. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, MAX BORN, L. E. J. BROUWER, RICHARD COURANT, CONSTANTIN CARATHÉODORY, WALTHER V. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR V. KÁRMÁN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER, ARNOLD SOMMERFELD

HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN
IN GÖTTINGEN

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN
IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN.

84. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

Inhalt des vierundachtzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Über Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen.

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

Das Ziel dieser Arbeit ist der Existenzbeweis für die Lösungen gewisser Summengleichungen (Satz 2). Das Ergebnis ist von Wichtigkeit für die Theorie der linearen Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung, wie ich in einer weiteren Arbeit zeigen werde. Hier behandele ich als Anwendung nur die homogene Summengleichung mit konstanten Koeffizienten und die Poincarésche Differenzengleichung.

§ 1.

Eine allgemeine Transformation.

Als Summengleichung bezeichnet Herr Horn ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, das dadurch ausgezeichnet ist, daß allemal in der $(\mu+1)$-ten Gleichung die μ ersten Unbekannten fehlen[1]); also

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\, x_{\mu+\nu} = c_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Von den Koeffizienten $a_{\mu\nu}$, c_μ setzen wir voraus:

$$(2) \qquad |a_{\mu\nu}| < K\vartheta^{\nu},$$

$$(3) \qquad \limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|c_\mu|} \leqq 1,$$

[1]) J. Horn, Volterrasche Integralgleichungen und Summengleichungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik **140** (1911), S. 120–174. – Analytische Lösungen von Summengleichungen. Archiv der Mathematik und Physik (3) **26** (1918), S. 132–145. – Vgl. auch eine Arbeit des Verfassers: Zur Theorie der Summengleichungen. Mathematische Zeitschrift **8** (1920), S. 159–170.

wo K, ϑ positive Zahlen sind und zwar $\vartheta < 1$. Gesucht sind Lösungen, für welche

(4) $$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} \leqq 1$$

ist; für solche wird die Reihe (1) *absolut* konvergieren.

Nun sei

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu$$

eine beliebige Potenzreihe, die für $|z| \leqq 1$ regulär und ohne Nullstelle ist, so daß die reziproke Funktion

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma'_\nu z^\nu$$

ebenfalls für $|z| \leqq 1$ regulär und ohne Nullstelle ist. Die Konvergenzradien sind daher *größer* als 1, und folglich ist

(5) $$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|\gamma_\nu|} < 1,$$

(5a) $$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|\gamma'_\nu|} < 1.$$

Ferner besteht die Gleichung

(6) (6a) $$\sum_{\varkappa=0}^{\lambda} \gamma_{\lambda-\varkappa}\gamma'_\varkappa = \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} \gamma'_{\lambda-\varkappa}\gamma_\varkappa = \begin{cases} 1 \text{ für } \lambda = 0 \\ 0 \text{ für } \lambda > 0. \end{cases}$$

Setzt man daher

(7) $$\sum_{\lambda=0}^{\nu} a_{\mu+\lambda,\nu-\lambda}\gamma_\lambda = a'_{\mu\nu},$$

(8) $$\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\mu+\lambda}\gamma_\lambda = c'_\mu,$$

so ergibt sich leicht:

(2a) $$|a'_{\mu\nu}| < K'\vartheta'^{\nu},$$

(3a) $$\limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|c'_\mu|} \leqq 1,$$

wo auch K', ϑ' positive Zahlen sind und $\vartheta' < 1$. Aus (7) folgt:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu} a'_{\mu+\varkappa,\nu-\varkappa}\gamma'_\varkappa = \sum_{\varkappa=0}^{\nu}\sum_{\lambda=0}^{\nu-\varkappa} a_{\mu+\varkappa+\lambda,\nu-\varkappa-\lambda}\gamma_\lambda\gamma'_\varkappa$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\nu}\sum_{\varkappa=0}^{\lambda} a_{\mu+\lambda,\nu-\lambda}\gamma_{\lambda-\varkappa}\gamma'_\varkappa = a_{\mu\nu} \text{ (wegen (6))};$$

ferner aus (8), da die nachstehende Doppelreihe wegen (3), (5), (5a) absolut, also unbedingt konvergiert:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} c'_{\mu+\varkappa}\gamma'_{\varkappa} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\mu+\varkappa+\lambda}\gamma_\lambda\gamma'_\varkappa$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\lambda} c_{\mu+\lambda}\gamma_{\lambda-\varkappa}\gamma'_\varkappa = c_\mu \qquad \text{(wegen (6))}.$$

Also ist

$$\text{(7a)} \qquad \sum_{\varkappa=0}^{\nu} a'_{\mu+\varkappa,\nu-\varkappa}\gamma'_\varkappa = a_{\mu\nu},$$

$$\text{(8a)} \qquad \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c'_{\mu+\varkappa}\gamma'_\varkappa = c_\mu .$$

Bildet man jetzt die Summengleichung

$$\text{(1a)} \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} a'_{\mu\nu} x_{\mu+\nu} = c'_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

so ist diese mit (1) *insofern äquivalent, als jede Lösung von* (1), *die der Nebenbedingung* (4) *genügt, auch Lösung von* (1a) *ist und umgekehrt.* Um das einzusehen, genügt es zu zeigen, daß (1a) aus (1) folgt; das Umgekehrte ergibt sich dann durch Vertauschung der gestrichenen mit den ungestrichenen Buchstaben. Setzt man in (1) $\mu+\lambda$ an Stelle von μ, multipliziert mit γ_λ und summiert nach λ, so folgt:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu+\lambda,\nu}\, x_{\mu+\lambda+\nu}\gamma_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\mu+\lambda}\gamma_\lambda = c'_\mu,$$

und da die Doppelreihe wegen (2), (4), (5) wieder absolut konvergiert, durch Umstellung der Glieder:

$$c'_\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\nu} a_{\mu+\lambda,\nu-\lambda}\gamma_\lambda x_{\mu+\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a'_{\mu\nu}\, x_{\mu+\nu} \qquad \text{(nach (7))}.$$

Das ist aber die Gleichung (1a), die also wirklich eine Folge von (1) ist.

§ 2.

Die homogene Summengleichung mit konstanten Koeffizienten.

Um sogleich eine Anwendung einzuschalten, beweisen wir

Satz 1. *Die Koeffizienten der homogenen Summengleichung*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x_{\mu+\nu} = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

seien so beschaffen, daß $a_0 \neq 0$ *ist, und daß die Funktion*

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

im Bereich $|z| \leqq q$ *regulär ist und daselbst* $n (\geqq 0)$ *Nullstellen hat (mehrfache mehrfach gezählt). Dann hat die Summengleichung genau* n *linear unabhängige Lösungen, für welche* $\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} \leqq q$ *ist. Diese Lösungen sind*

$$x_\nu = \varrho_\lambda^\nu, \; \nu \varrho_\lambda^\nu, \; \ldots, \; \nu^{m_\lambda - 1} \varrho_\lambda^\nu,$$

wenn ϱ_λ *die Nullstellen von* $F(z)$ *sind, und* m_λ *die Ordnung der Nullstelle* ϱ_λ *bedeutet.*

Daß die angegebenen Ausdrücke wirklich Lösungen der Summengleichung sind, ist leicht zu verifizieren. Daß es keine weiteren gibt, ist das Bemerkenswerte an dem Satz, der übrigens nicht neu ist. Für $n = 0$, wo der Satz aussagt, daß nur die triviale Lösung $x_\nu = 0$ vorhanden ist, hat ihn bereits Herr Helge von Koch bewiesen[2]), und für beliebiges n auf einem Weg, der von dem unseren nicht verschieden ist, Herr Schürer[3]). Offenbar genügt es, $q = 1$ anzunehmen, da der Satz durch die Substitution

$$a_\nu = b_\nu q^{-\nu}, \qquad x_\nu = q^\nu y_\nu$$

auf diesen Fall zurückgeführt wird. Da also jetzt die Reihe $F(z)$ für $|z| \leqq 1$ regulär sein soll, ist

$$|a_\nu| < K \vartheta^\nu \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

so daß die Voraussetzung (2) erfüllt ist (es ist $a_{\mu\nu} = a_\nu$). Bezeichnet

$$P(z) = z^n + g_1 z^{n-1} + \ldots + g_n = \sum_{\nu=0}^{n} g_{n-\nu} z^\nu$$

das Polynom n-ten Grades, das den höchsten Koeffizienten 1 und gerade die n Nullstellen von $F(z)$ hat, so ist die Funktion

$$\frac{P(z)}{F(z)} = f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu$$

für $|z| \leqq 1$ regulär und ohne Nullstelle; sie erfüllt also die Voraussetzungen

---

[2]) H. von Koch, On regular and irregular solutions of some infinite systems of linear equations. Proceedings of the fifth international congress of mathematicians 1 (1912), S. 352–365.

[3]) Fritz Schürer, Eine gemeinsame Methode zur Behandlung gewisser Funktionalgleichungsprobleme. Berichte der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig 70 (1918), S. 185–240.

des vorigen Paragraphen. Die Summengleichung läßt sich daher transformieren, und zwar ist nach (7)

$$a'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\nu} a_{\nu-\lambda}\gamma_\lambda.$$

Aus der vorausgehenden Gleichung folgt aber, indem man mit dem Nenner $F(z)$ multipliziert,

$$\sum_{\nu=0}^{n} g_{n-\nu} z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu,$$

so daß

$$a'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\nu} a_{\nu-\lambda}\gamma_\lambda = \begin{cases} g_{n-\nu} & \text{für } \nu = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{für } \nu > n \end{cases}$$

ist. Die transformierte Summengleichung ist daher diese:

$$\sum_{\nu=0}^{n} g_{n-\nu}\, x_{\mu+\nu} = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

oder in extenso geschrieben:

$$x_{\mu+n} + g_1 x_{\mu+n-1} + \ldots + g_n x_\mu = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Sie ist also eine lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten; deren Lösungen sind aber, wie allgemein bekannt ist, gerade die in Satz 1 angegebenen.

§ 3.

Eine weitere Transformation.

Wir kehren jetzt in bezug auf c_μ, x_ν zu den Voraussetzungen des § 1 zurück und setzen außerdem $a_{\mu\nu} = a_\nu + b_{\mu\nu}$; wir betrachten also die Summengleichung

$$(9) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + b_{\mu\nu}) x_{\mu+\nu} = c_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dabei soll für alle μ

$$(10) \qquad a_0 + b_{\mu 0} \neq 0$$

sein, damit in der $(\mu+1)$-ten Gleichung die $(\mu+1)$-te Unbekannte x_μ wirklich vorkommt; außerdem sei

$$(11) \qquad |b_{\mu\nu}| < k_\mu \vartheta^\nu \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

$$(12) \qquad \lim_{\mu=\infty} k_\mu = 0.$$

Endlich sei die Funktion

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu \tag{13}$$

für $|z|\leqq 1$ regulär, so daß, indem nötigenfalls die Zahl ϑ durch eine größere (aber <1) ersetzt wird, neben der Ungleichung (11) auch folgende gilt:

$$|a_\nu|<G\vartheta^\nu. \tag{14}$$

Dann sind die Voraussetzungen des § 1 erfüllt. Ist $n(\geqq 0)$ die Anzahl der Nullstellen der Funktion $F(z)$ im Bereich $|z|\leqq 1$ (mehrfache mehrfach gezählt), so sei

$$P(z)=z^n+g_1z^{n-1}+\ldots+g_n=\sum_{\nu=0}^{n}g_{n-\nu}z^\nu \tag{15}$$

das Polynom n-ten Grades, das den höchsten Koeffizienten 1 und gerade die n Nullstellen von $F(z)$ hat. Setzt man dann

$$\frac{P(z)}{F(z)}=f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\nu z^\nu, \tag{16}$$

so ist $f(z)$ für $|z|\leqq 1$ regulär und ohne Nullstellen. Man kann also die Transformation des § 1 anwenden, wodurch die Summengleichung (9) übergeht in:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(a'_\nu+b'_{\mu\nu})x_{\mu+\nu}=c'_\mu \qquad (\mu=0,1,2,\ldots). \tag{17}$$

Dabei ist analog zu (7) und (8)

$$a'_\nu=\sum_{\lambda=0}^{\nu}a_{\nu-\lambda}\gamma_\lambda, \tag{18}$$

$$b'_{\mu\nu}=\sum_{\lambda=0}^{\nu}b_{\mu+\lambda,\nu-\lambda}\gamma_\lambda, \tag{19}$$

$$c'_\mu=\sum_{\lambda=0}^{\infty}c_{\mu+\lambda}\gamma_\lambda; \tag{20}$$

insbesondere also wegen (10):

$$a'_0+b'_{\mu 0}=(a_0+b_{\mu 0})\gamma_0\neq 0. \tag{21}$$

Nun folgt aus (16) durch Multiplikation mit dem Nenner $F(z)$:

$$\sum_{\nu=0}^{n}g_{n-\nu}z^\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\nu z^\nu,$$

so daß

$$a'_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\nu} a_{\nu-\lambda}\,\gamma_\lambda = \begin{cases} g_{n-\nu} \text{ für } \nu = 0, 1, \ldots, n \\ 0 \text{ für } \nu > n \end{cases}$$

ist. Die transfoımierte Summengleichung (17) nimmt daher die Form an:

$$(22)\quad x_{\mu+n} + g_1 x_{\mu+n-1} + \ldots + g_n x_\mu + \sum_{\nu=0}^{\infty} b'_{\mu\nu}\, x_{\mu+\nu} = c'_\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dabei ist wegen (21)

$$(23)\qquad g_n + b'_{\mu 0} \neq 0.$$

Für $b'_{\mu\nu}$ ergibt sich aus (11), (12) und (5) sogleich die Abschätzung

$$(24)\qquad |b'_{\mu\nu}| < k'_\mu\, \vartheta'^\nu,$$

wobei auch $\vartheta' < 1$, und

$$(25)\qquad \lim_{\mu=\infty} k'_\mu = 0$$

ist. Ebenso ist wieder

$$(26)\qquad \limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|c'_\mu|} \leqq 1.$$

Bei der Auflösung des Gleichungssystems (22) genügt es offenbar, diese Gleichungen für $\mu \geqq M$ zu befriedigen, wo M ein beliebig großer Index sein darf. Darin kommen nämlich die Unbekannten x_μ nur für $\mu \geqq M$ vor; hat man aber diese gefunden, so ergeben sich die fehlenden $x_{M-1}, x_{M-2}, \ldots, x_0$ wegen (23) nachträglich aus (22), indem man der Reihe nach $\mu = M-1, M-2, \ldots, 0$ setzt. Wir wollen nun die Gleichungen (22) für $\mu \geqq M$ umgestalten, wobei wir uns eine geeignete Wahl des Index M für später vorbehalten. Dazu setzen wir

$$(27)\qquad \frac{z^n}{P(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\delta_\nu}{z^\nu}.$$

Von dieser Reihe ist offenbar

$$\frac{z^n}{(z-1)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n+\nu-1}{\nu} \frac{1}{z^\nu}$$

eine Majorante, so daß

$$(28)\qquad |\delta_\nu| \leqq \binom{n+\nu-1}{\nu}$$

sein wird. Außerdem folgt aus (27):

$$(29)\qquad 1 = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{g_\nu}{z^\nu} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\delta_\nu}{z^\nu},$$

so daß speziell $\delta_0 = 1$ ist.

Setzt man nun in (22) der Reihe nach $\mu = M, M+1, \ldots, \mu$, so folgt:

$$\begin{array}{l|l}
x_{M+n} + g_1 x_{M+n-1} + \cdots + g_n x_M = c'_M - \sum_{\nu=0}^{\infty} b'_{M\nu} x_{M+\nu} & \delta_{\mu-M} \\
x_{M+n+1} + g_1 x_{M+n} + \cdots + g_n x_{M+1} = c'_{M+1} - \sum_{\nu=0}^{\infty} b'_{M+1,\nu} x_{M+1+\nu} & \delta_{\mu-M-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
x_{\mu+n} + g_1 x_{\mu+n-1} + \cdots + g_n x_\mu = c'_\mu - \sum_{\nu=0}^{\infty} b'_{\mu\nu} x_{\mu+\nu} & \delta_0 .
\end{array}$$

Multipliziert man mit den beigeschriebenen Faktoren und addiert dann, so fallen links die Unbekannten $x_{M+n}, x_{M+n+1}, \ldots, x_{\mu+n-1}$ wegen der Identität (29) heraus und es folgt, da $\delta_0 = 1$ ist:

$$\text{(30)} \quad \left\{ \begin{aligned} & x_{\mu+n} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\lambda=0}^{\nu} g_{n-\nu+\lambda}\, \delta_{\mu-M-\lambda}\, x_{M+\nu} \\ & = \sum_{\lambda=0}^{\mu-M} c'_{\mu-\lambda} \delta_\lambda - \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\mu-M} b'_{\mu-\lambda,\nu}\, \delta_\lambda\, x_{\mu+\nu-\lambda}, \end{aligned} \right.$$

wobei links die δ mit negativem Index (die nur für $\mu < M + n - 1$ auftreten) durch Null zu ersetzen sind[4]).

Das System der Gleichungen (30) für $\mu = M, M+1, M+2, \ldots$ ist offenbar dem System (22) für $\mu = M, M+1, M+2, \ldots$ völlig äquivalent. Die Nebenbedingung (4) ist dabei nicht erforderlich; wir wollen daher vorläufig auch solche Lösungen von (22) und (30) zulassen, welche diese Nebenbedingung nicht erfüllen.

§ 4.

Die allgemeine Lösung der Summengleichung.

Bedeutet ζ irgendeine Zahl in dem Intervall

$$\text{(31)} \qquad 1 < \zeta < \frac{1}{\vartheta'},$$

so wird nach (25), wenn M genügend groß ist,

$$\text{(32)} \qquad k'_\nu < \tfrac{1}{2}(1 - \vartheta'\zeta)(\zeta - 1)^n \qquad \text{für } \nu \geq M$$

sein, und diese Ungleichungen bleiben offenbar richtig, wenn man ζ durch

[4]) Wenn $n = 0$, so tritt in (30) natürlich Null an Stelle der links stehenden Doppelsumme. Die auch später nötigen leichten Modifikationen für $n = 0$ überlassen wir dem Leser.

eine hinreichend benachbarte Zahl ersetzt; man kann also zwei Zahlen ζ_1 und ζ_2 in den Intervallen

$$1 < \zeta_1 < \zeta < \zeta_2 < \frac{1}{\vartheta'}$$

so bestimmen, daß auch die Ungleichungen gelten:

$$k'_\nu < \frac{1}{2}(1 - \vartheta'\zeta_1)(\zeta_1 - 1)^n \quad \text{für } \nu \geqq M, \tag{32a}$$

$$k'_\nu < \frac{1}{2}(1 - \vartheta'\zeta_2)(\zeta_2 - 1)^n \quad \text{für } \nu \geqq M. \tag{32b}$$

Nun beweisen wir: *Wenn die Zahl ζ und der Index M den Forderungen* (31), (32) *gemäß gewählt werden, so hat die Summengleichung* (22) *nach willkürlicher Vorgabe der n Werte*

$$x_M,\ x_{M+1}, \ldots, x_{M+n-1}$$

genau eine Lösung mit der Nebenbedingung

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} \leqq \zeta.$$

Nach den Feststellungen des § 3 genügt es, das Gleichungssystem (30) statt der Summengleichung (22) zu betrachten. Da ist zunächst leicht zu beweisen, daß es *höchstens eine* solche Lösung gibt. Sind nämlich x_ν, y_ν zwei solche Lösungen, so genügt ihre Differenz $x_\nu - y_\nu = z_\nu$ dem homogenen Gleichungssystem

$$z_{\mu+n} = -\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\mu-M} b'_{\mu-\lambda,\nu}\,\delta_\lambda\, z_{\mu+\nu-\lambda} \qquad (\mu \geqq M), \tag{33}$$

und es ist

$$z_M = 0,\ z_{M+1} = 0, \ldots, z_{M+n-1} = 0. \tag{34}$$

Außerdem gibt es wegen

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} \leqq \zeta < \zeta_2, \qquad \limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|y_\nu|} \leqq \zeta < \zeta_2$$

eine Zahl C so, daß

$$z_\mu = |x_\mu - y_\mu| \leqq C\zeta_2^\mu \qquad \text{für } \mu \geqq M \tag{35}$$

ist. Dabei sei C die kleinste Zahl, die das leistet (die Menge all dieser C enthält ja offenbar ihre untere Grenze). Schätzt man jetzt die rechte Seite der Formel (33) mit Hilfe von (24), (28), (35) ab, so ergibt sich:

$$|z_{\mu+n}| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\mu-M} k'_{\mu-\lambda}\,\vartheta'^{\nu}\binom{n+\lambda-1}{\lambda} C\zeta_2^{\mu+\nu-\lambda}$$

$$= \frac{C\zeta_2^\mu}{1-\vartheta'\zeta_2}\sum_{\lambda=0}^{\mu-M} k'_{\mu-\lambda}\binom{n+\lambda-1}{\lambda}\zeta_2^{-\lambda}.$$

Wegen (32b) folgt hieraus weiter:

$$|z_{\mu+n}| \leqq \frac{1}{2} C \zeta_2^\mu (\zeta_2 - 1)^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{n+\lambda-1}{\lambda} \zeta_2^{-\lambda}$$
$$= \frac{1}{2} C \zeta_2^{\mu+n}.$$

Zusammen mit (34) besagt das aber:

$$|z_\mu| \leqq \frac{1}{2} C \zeta_2^\mu \qquad \text{für } \mu \geqq M.$$

Diese Ungleichung lehrt, daß man in (35) die Zahl C durch $\frac{1}{2}C$ ersetzen darf, und da C schon so klein wie möglich gewählt war, muß $\frac{1}{2}C \geqq C$, also $C = 0$ sein. Aber dann ist nach (35) $x_\mu = y_\mu$ für $\mu \geqq M$, womit gezeigt ist, daß es *höchstens eine* Lösung der angegebenen Art gibt.

Um nun zu zeigen, daß es wirklich eine gibt, bezeichnen wir die vorgeschriebenen Anfangswerte mit

$$x_M = \xi_M,\ x_{M+1} = \xi_{M+1},\ \ldots,\ x_{M+n-1} = \xi_{M+n-1},$$

und suchen das System (30) durch sukzessive Näherungen zu lösen, indem wir setzen:

$$x_\mu^{(0)} = 0 \qquad (\text{für } \mu \geqq M + n), \tag{36}$$

$$x_\mu^{(s)} = \xi_\mu \qquad (\text{für } M \leqq \mu \leqq M + n - 1), \tag{37}$$

$$\left\{\begin{aligned} x_{\mu+n}^{(s+1)} &= \sum_{\lambda=0}^{\mu-M} c'_{\mu-\lambda}\,\delta_\lambda - \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\mu-M} b'_{\mu-\lambda,\nu}\,\delta_\lambda\, x_{\mu+\nu-\lambda}^{(s)} \\ &\quad - \sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\lambda=0}^{\nu} g_{n-\nu+\lambda}\,\delta_{\mu-M-\lambda}\,\xi_{M+\nu} \qquad (\text{für } \mu \geqq M). \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Wir zeigen zunächst, daß die sukzessive gebildeten Reihen konvergieren, indem

$$|x_\mu^{(s)}| < C \zeta_1^\mu \qquad (\text{für } \mu \geqq M) \tag{39}$$

ist, wo C von μ und s nicht abhängt. Wegen (26) und (28) ist jedenfalls

$$|c'_\mu| < K_1 \zeta_1^\mu,$$
$$\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\lambda=0}^{\nu} g_{n-\nu+\lambda}\,\delta_{\mu-M-\lambda}\,\xi_{M+\nu}\right| < K_2 \zeta_1^\mu,$$

wo K_1, K_2 von μ nicht abhängen. Nun bedarf die Ungleichung (39) für $M \leqq \mu \leqq M + n - 1$ wegen (37) keines Beweises. Für $s = 0$ ist sie wegen (36) erfüllt. Gilt sie aber für einen bestimmten Wert von s, so ergibt sich aus (38):

$$|x_{\mu+n}^{(s+1)}| < \sum_{\lambda=0}^{\mu-M} K_1 \zeta_1^{\mu-\lambda}\binom{n+\lambda-1}{\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\mu-M} k'_{\mu-\lambda}\,\vartheta''^{\nu}\binom{n+\lambda-1}{\lambda} C\zeta_1^{\mu+\nu-\lambda}$$
$$+ K_2\zeta_1^{\mu},$$

und wenn man hier genau wie Seite 9 unten, 10 oben weiter abschätzt, wobei nur die Ungleichung (32a) statt (32b) zu benutzen ist, erhält man:

$$|x_{\mu+n}^{(s+1)}| < \frac{K_1}{(\zeta_1-1)^n}\zeta_1^{\mu+n} + \frac{1}{2}C\zeta_1^{\mu+n} + K_2\zeta_1^{\mu+n} < C\zeta_1^{\mu+n},$$

sofern die Zahl C größer als

$$2\left(\frac{K_1}{(\zeta_1-1)^n} + K_2\right)$$

angenommen wird. Damit ist die Allgemeingültigkeit von (39) bewiesen.

Aus (38) folgt weiter:

$$x_{\mu+n}^{(s+1)} - x_{\mu+n}^{(s)} = -\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\mu-M} b'_{\mu-\lambda,\nu}\,\delta_\lambda(x_{\mu+\nu-\lambda}^{(s)} - x_{\mu+\nu-\lambda}^{(s-1)}). \tag{40}$$

Wir behaupten nun, daß

$$|x_{\mu}^{(s)} - x_{\mu}^{(s-1)}| < \frac{2C\zeta_1^{\mu}}{2^{s-1}} \qquad \text{für } \mu \geqq M \tag{41}$$

ist. Für $M \leqq \mu \leqq M + n - 1$ bedarf das wegen (37) keines Beweises. Ferner ist die Ungleichung (41) gewiß für $s = 1$ richtig (wegen (39)). Gilt sie aber für einen gewissen Wert von s, so schließt man aus (40):

$$|x_{\mu+n}^{(s+1)} - x_{\mu+n}^{(s)}| < \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\mu-M} k'_{\mu-\lambda}\,\vartheta''^{\nu}\binom{n+\lambda-1}{\lambda}\frac{2C\zeta_1^{\mu+\nu-\lambda}}{2^{s-1}}$$
$$\leqq \frac{2C}{2^s}\zeta_1^{\mu+n} \qquad \text{(wieder analog wie S. 9, 10)},$$

und damit ist die Allgemeingültigkeit von (41) bewiesen.

Aus (41) folgt sogleich die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{s=\infty} x_{\mu}^{(s)} = x_{\mu} \tag{42}$$

und zwar ist

$$|x_{\mu}^{(s)} - x_{\mu}| < \frac{2C\zeta_1^{\mu}}{2^{s-1}}. \tag{43}$$

Hieraus wieder schließt man:

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\mu-M} b'_{\mu-\lambda,\nu}\,\delta_\lambda(x_{\mu+\nu-\lambda}^{(s)} - x_{\mu+\nu-\lambda})\right|$$
$$\leqq \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\mu-M} k'_{\mu-\lambda}\,\vartheta''^{\nu}\binom{n+\lambda-1}{\lambda}\frac{2C\zeta_1^{\mu+\nu-\lambda}}{2^{s-1}}$$
$$\leqq \frac{C}{2^{s-1}}\zeta_1^{\mu+n} \qquad \text{(wieder analog wie S. 9, 10)}.$$

Daher ist

$$\lim_{s=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} {\sum_{\lambda=0}^{\mu-M}}' b'_{\mu-\lambda,\nu}\, \delta_\lambda\, x^{(s)}_{\mu+\nu-\lambda} = \sum_{\nu=0}^{\infty} {\sum_{\lambda=0}^{\mu-M}}' b'_{\mu-\lambda,\nu}\, \delta_\lambda\, x_{\mu+\nu-\lambda},$$

und folglich geht Gleichung (38), wenn man s über alle Grenzen wachsen läßt, über in (30). Die gefundenen x_μ sind also Lösungen des Systems (30) und folglich auch der Summengleichung (22). Sie genügen aber auch der geforderten Nebenbedingung. Denn aus (43) und (39) folgt sofort:

$$(44) \qquad \limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|x_\mu|} \leqq \zeta_1 < \zeta.$$

Damit ist die zu Beginn dieses Paragraphen aufgestellte Behauptung vollständig bewiesen. Aus ihr folgt aber in Verbindung mit (44) noch mehr, nämlich: *Wenn eine Lösung von* (22) *der Ungleichung*

$$\limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|x_\mu|} \leqq \zeta$$

genügt, so findet hierbei niemals Gleichheit statt. Da nun ζ jede Zahl des Intervalles (31) bedeuten darf, also nur beliebig wenig größer als 1 zu sein braucht, so erkennt man, daß an Stelle von (44) sogar die schärfere Ungleichung gilt:

$$\limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|x_\mu|} \leqq 1.$$

Für Lösungen, die dieser Nebenbedingung genügen, ist die Summengleichung (22) äquivalent mit der ursprünglichen Summengleichung (9), so daß wir auch diese gelöst haben.

Ist die Summengleichung (9) homogen, sind also alle c_μ und folglich auch c'_μ gleich Null, so gibt es genau n linear unabhängige Lösungen

$$x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, \ldots, x_{\nu n},$$

die man etwa durch die Anfangswerte

$$\begin{pmatrix} x_{M1} & x_{M+1,1} & \ldots\ldots & x_{M+n-1,1} \\ x_{M2} & x_{M+1,2} & \ldots\ldots & x_{M+n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ x_{Mn} & x_{M+1,n} & \ldots\ldots & x_{M+n-1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{pmatrix}$$

festlegen kann. Die allgemeine Lösung hat dann die Form

$$x_\nu = \sum_{\lambda=1}^{n} C_\lambda\, x_{\nu\lambda},$$

wo die C_λ willkürliche Konstanten sind. Bei der inhomogenen Summengleichung ist die Differenz von zwei Lösungen offenbar eine Lösung der homo-

genen. Wenn also $x_\nu = x_{\nu 0}$ eine partikuläre Lösung ist, so hat die allgemeine Lösung die Form

$$x_\nu = x_{\nu 0} + \sum_{\lambda=1}^{n} C_\lambda x_{\nu\lambda}.$$

Unsere Resultate zusammenfassend, erhalten wir den

Satz 2. *Die Koeffizienten der Summengleichung*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + b_{\mu\nu}) x_{\mu+\nu} = c_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

mögen die Bedingungen erfüllen:

$$a_0 + b_{\mu 0} \neq 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$|b_{\mu\nu}| \leq k_\mu \vartheta^\nu, \qquad (\vartheta < 1),$$
$$\lim_{\mu=\infty} k_\mu = 0,$$
$$\limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|c_\mu|} \leq 1,$$

und die Funktion

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

sei im Bereich $|z| \leq 1$ *regulär. Ist* $n (\geq 0)$ *die Anzahl ihrer Nullstellen in diesem Bereich (mehrfache mehrfach gezählt), so enthält die allgemeine Lösung der Summengleichung mit der Nebenbedingung*

$$\limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|x_\mu|} \leq 1$$

genau n *willkürliche Konstanten* C_λ *und hat die Form*

$$x_\nu = x_{\nu 0} + \sum_{\lambda=1}^{n} C_\lambda x_{\nu\lambda}.$$

Ist M *ein genügend großer Index, so gibt es eine und nur eine derartige Lösung, für welche die* n *Unbekannten*

$$x_M, x_{M+1}, \ldots, x_{M+n-1}$$

vorgegebene Werte haben.

Für $n = 0$ besagt der Satz natürlich, daß genau *eine* Lösung mit der angegebenen Nebenbedingung vorhanden ist; es bleibt keine Unbekannte willkürlich.

§ 5.

Die Poincarésche Differenzengleichung.

Die Differenzengleichung r-ter Ordnung

$$(45)\quad \alpha_{\mu 0} D_\mu + \alpha_{\mu 1} D_{\mu+1} + \dots + \alpha_{\mu, r-1} D_{\mu+r-1} + D_{\mu+r} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

heißt eine Poincarésche, wenn die Grenzwerte

$$(46)\quad \lim_{\mu=\infty} \alpha_{\mu\nu} = \alpha_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \dots, r-1)$$

existieren. Dann gilt

Satz 3. *Sind $q_1, q_2, \dots, q_\sigma$ die voneinander verschiedenen absoluten Beträge der Wurzeln der „charakteristischen Gleichung“*

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{r-1} z^{r-1} + z^r = 0,$$

und ist allgemein e_λ die Anzahl der Wurzeln vom absoluten Betrag q_λ, mehrfache mehrfach gezählt, so daß

$$e_1 + e_2 + \dots + e_\sigma = r$$

ist, dann hat die Differenzengleichung (45), *sofern $\alpha_{\mu 0}$ für alle μ von Null verschieden ist, ein Fundamentalsystem von Integralen, die derart in σ Klassen zerfallen, daß allgemein für die Integrale der λ-ten Klasse und deren lineare Verbindungen die Beziehung*

$$\limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|D_\mu|} = q_\lambda$$

statthat. Die Anzahl der Integrale der λ-ten Klasse ist gleich e_λ.

Für diesen Satz habe ich vor zwölf Jahren einen sehr komplizierten Beweis erbracht[5]). Nur im Fall $\sigma = r$, d. h. wenn die absoluten Beträge der Wurzeln alle voneinander verschieden sind, konnte ich ihn wesentlich einfacher gestalten und zugleich ein weitergehendes Resultat gewinnen[6]). Ich will jetzt den allgemeinen Satz 3 von neuem beweisen, indem ich zeige, daß er fast unmittelbar aus Satz 2 folgt.

Die Zahlen q_λ mögen der Größe nach geordnet sein:

$$0 \leqq q_1 < q_2 < \dots < q_\sigma .$$

Ist dann p eine beliebige positive Zahl, und setzt man

$$(47)\quad \begin{cases} \alpha_\nu = \dfrac{a_\nu}{p^\nu}, \quad \alpha_{\mu\nu} - \alpha_\nu = \dfrac{b_{\mu\nu}}{p^\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots, r-1), \\ \alpha_r = 1 = \dfrac{a_r}{p^r}, \quad 0 = \dfrac{b_{\mu r}}{p^r}, \end{cases}$$

[5]) Über die Poincarésche lineare Differenzengleichung, Journal für die reine und angewandte Mathematik **137** (1909), S. 6–64.

[6]) Über einen Satz des Herrn Poincaré, Journal für die reine und angewandte Mathematik **136** (1909), S. 17–37.

$$D_\mu = p^\mu x_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{48}$$

so geht die Differenzengleichung (45) über in folgende:

$$\sum_{\nu=0}^{r} (a_\nu + b_{\mu\nu}) x_{\mu+\nu} = 0. \tag{49}$$

Diese neue Gleichung fassen wir als homogene Summengleichung auf, deren Koeffizienten a_ν, $b_{\mu\nu}$ dann offenbar die Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllen (für $\nu > r$ verschwinden sie). Die Anzahl der Nullstellen der Funktion

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{r} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{r} \alpha_\nu p^\nu z^\nu$$

im Bereich $|z| \leqq 1$ hängt von der Wahl der positiven Zahl p ab. Wählt man p kleiner als q_1 (falls nicht $q_1 = 0$ ist), so sind keine Nullstellen vorhanden, also auch keine Lösungen, für die

$$\limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|x_\mu|} \leqq 1, \qquad \text{d. h.} \qquad \limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|D_\mu|} \leqq p < q_1$$

ist. Wählt man für p eine Zahl zwischen q_1 und q_2, so sind e_1 Nullstellen vorhanden, also auch e_1 Lösungen, für die

$$\limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|x_\mu|} \leqq 1, \qquad \text{d. h.} \qquad \limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|D_\mu|} \leqq p < q_2$$

ist, und da p beliebig nahe an q_1 liegen darf, so ist für diese Lösungen

$$\limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|D_\mu|} = q_1.$$

Wählt man sodann für p eine Zahl zwischen q_2 und q_3, so sind $e_1 + e_2$ Nullstellen vorhanden, also auch $e_1 + e_2$ Lösungen, für die

$$\limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|x_\mu|} \leqq 1, \qquad \text{d. h.} \qquad \limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|D_\mu|} \leqq p < q_3$$

ist. Hier sind natürlich die e_1 vorhin gefundenen Lösungen dabei; für die e_2 andern muß, weil p beliebig nahe an q_2 liegen darf,

$$\limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|D_\mu|} = q_2$$

sein. So fortschließend erhält man den gesamten Inhalt von Satz 3.

(Eingegangen am 15. 2. 1921.)

Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten.

(2. Mitteilung.)

Von

Emil Hilb in Würzburg.

Wir beschäftigen uns im folgenden[1]) mit der linearen Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} = f(x), \tag{1}$$

in welcher die $g_k(x)$ Polynome p-ten Grades sind, und zwar sei

$$g_k(x) = \sum_{r=1}^{p+1} \alpha_{kr} x^{r-1}. \tag{2}$$

Wir setzen

$$\frac{d^0 y}{dx^0} = y = \xi_1, \qquad \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} = y^{(k-1)} = \xi_k, \tag{3}$$

dann erhält man durch fortgesetzte Differentiation von (1) nach x das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{i-1} \binom{i-1}{\mu} g^{(\mu)}_{k+\mu-i+1}(x)\, \xi_k = f^{(i-1)}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Dabei sind alle g, deren unterer Index < 1 ist, Null zu setzen, und dasselbe gilt für alle Ableitungen der g von höherer als der p-ten Ordnung, also für $\mu > p$. In der zur linken Seite von (4) gehörigen Koeffizientenmatrix sind also in der ersten Kolonne höchstens die $p+1$ ersten Zeilen, in der k-ten Kolonne höchstens die $p+k$ ersten Zeilen nicht identisch Null.

[1]) Die erste Mitteilung, Math. Ann. 82. S. 1–39, werden wir stets als I zitieren.

Man wird jetzt das Gleichungssystem (4) der entsprechenden Diskussion unterwerfen wie I (3). An die Stelle der Gleichung I (6) tritt jetzt, wenn wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)\, z^{k-1} = g(x, z) = \sum_{r=1}^{p+1} h_r(z)\, x^{r-1} \tag{5}$$

setzen, die Gleichung

$$h_{p+1}(z) = 0. \tag{6}$$

Der Einfachheit halber lassen wir alle Ausartungen weg und machen wir speziell die Annahme

a) *Gleichung* (6) *habe nur einfache Wurzeln* z_ν.

Dazu werden noch zwei weitere Annahmen b) und c) bzw. c′) treten. Ich hoffe aber, in einer späteren Arbeit darauf zurückkommen oder die dabei entstehenden Fragen durch einen jüngeren Mathematiker bearbeiten lassen zu können[2]). In einer weiteren Mitteilung werde ich die hier entwickelten Methoden zu einem neuen Aufbau der Theorie der linearen Differenzengleichungen benutzen sowie in Anschluß an Pincherle[3]) eine ganz andere Methode entwickeln, welche gestattet, Integrale von (1) durch ihr Verhalten in der Umgebung von $x = \infty$ zu charakterisieren. Es erscheint dieses um so angebrachter, als bei dieser anderen Methode gerade der Fall, daß (6) keine Wurzeln hat, bei dem also die jetzige Methode überhaupt keine Integrale liefert, besonders einfach wird.

Kapitel I.

Behandlung des Falles, daß die Differentialgleichung (1) ein eindeutig bestimmtes Integral hat.

§ 1.

Zurückführung auf die Bestimmung einer beschränkten vorderen Reziproken.

Es sei q eine reelle positive Größe, die kleiner ist als der Konvergenzradius der Potenzreihe $g(x, z)$ in bezug auf z. Wir dividieren die i-te Zeile des Gleichungssystems (4) durch $\left[{i-1 \atop p}\right] q^{i-1}$, wobei

$$\left[{i \atop p}\right] = \binom{i}{p} \text{ für } i \geqq p, \qquad \left[{i \atop p}\right] = 1 \text{ für } i \leqq p \tag{7}$$

[2]) Diese Ausnahmefälle lassen sich, wenn man auf die explizite Darstellung der Integrale verzichtet, nach Perron — vgl. die unmittelbar folgende Arbeit Perrons sowie meine dritte Mitteilung — in umfassender Weise erledigen durch direkte Diskussion des Gleichungssystems, das man aus (4) erhält, indem man $x = 0$ setzt.

[3]) S. Pincherle, Sull inversione degl' integrali definiti. Mem. Soc. it. delle Sc. (3) **15** (1907).

ist, und setzen

$$(8)\qquad \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} = \xi_k = q^{k-1}\zeta_k, \qquad \frac{f^{(i-1)}(x)}{\left[\begin{matrix} i-1 \\ p \end{matrix}\right] q^{i-1}} = y_i,$$

so daß $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2$ konvergiert, sofern

$$(9)\qquad \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|f^{(i)}(x)|} \leqq q.$$

Multipliziert man die i-te Zeile von (4) mit x_i, so erhält man durch Addition dieser Gleichungen

$$(10)\qquad A(x,\zeta) \equiv \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{ik}q^{k-1}}{\left[\begin{matrix} i-1 \\ p \end{matrix}\right] q^{i-1}} x_i\zeta_k$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{i-1} g_{k+\mu-i+1}^{(\mu)}(x) \frac{\binom{i-1}{\mu} q^{k-1}}{\left[\begin{matrix} i-1 \\ p \end{matrix}\right] q^{i-1}} x_i\zeta_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Nun ist $g^{(\mu)}(x) \equiv 0$ bei beliebigem unteren Index, wenn $\mu > p$, ferner ist $\binom{i-1}{\mu} = 0$, sobald $\mu > i-1$; wir dürfen daher in (10) den Summationsindex μ stets zwischen 0 und p nehmen. Ersetzt man in dem Ausdruck für $A(x,\zeta)$ $k-i+1$ durch σ, so erhält man[4])

$$(11)\qquad A(x,\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\sigma=-p+1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{p} g_{\sigma+\mu}^{(\mu)}(x) \frac{\binom{i-1}{\mu}}{\left[\begin{matrix} i-1 \\ p \end{matrix}\right]} q^{\sigma-1} x_i \zeta_{\sigma+i-1},$$

woraus genau wie in I S. 6 folgt, daß $A(x,\zeta)$ eine beschränkte Bilinearform ist, wenn

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 \quad\text{und}\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\xi_k}{q^{k-1}}\right|^2$$

konvergieren. Existiert bei beliebigen x_i mit absolut konvergenter Quadratsumme ein ebensolches Lösungssystem ζ_k von (10), so ist

$$(13)\qquad \overline{\lim} \sqrt[k]{|\xi_k|} \leqq q.$$

Man hat also die Aufgabe, zu $A(x,\zeta)$ eine beschränkte hintere Reziproke

$$(14)\qquad \Psi(\zeta,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_{ik}q^{k-1}}{q^{i-1}} \left[\begin{matrix} k-1 \\ p \end{matrix}\right] \zeta_i y_k$$

---

[4]) σ würde zunächst zwischen $-\infty$ und $+\infty$ zu nehmen sein, da aber nur g mit positivem unteren Index in Betracht kommen, muß $\sigma+\mu \geqq 1$, also $\sigma \geqq 1-p$ sein.

so zu bestimmen, daß

$$(15)\quad A(x,\zeta)\Psi(\zeta,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{ik}\,q^{k-1}}{\left[\begin{smallmatrix}i-1\\ p\end{smallmatrix}\right]q^{i-1}}\;\frac{\psi_{kl}\,q^{l-1}\left[\begin{smallmatrix}l-1\\ p\end{smallmatrix}\right]}{q^{k-1}}\,x_i y_l=\sum_{i=1}^{\infty}x_i y_i$$

wird, woraus man dann für die gesuchten Unbekannten

$$(16)\quad \zeta_k=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\psi_{kl}\,q^{l-1}\left[\begin{smallmatrix}l-1\\ p\end{smallmatrix}\right]}{q^{k-1}}\,y_l$$

erhält. Eine beschränkte hintere Reziproke existiert aber nach I Kap. I, § 1 immer, wenn eine und nur eine vordere Reziproke

$$(17)\quad \Phi(x,\zeta)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_{ik}\,q^{k-1}\left[\begin{smallmatrix}k-1\\ p\end{smallmatrix}\right]}{q^{i-1}}\,x_i\zeta_k$$

existiert, so daß

$$(18)\quad \Phi(x,\zeta)A(\zeta,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_{ik}\,q^{k-1}\left[\begin{smallmatrix}k-1\\ p\end{smallmatrix}\right]}{q^{i-1}}\;\frac{a_{kl}\,q^{l-1}}{\left[\begin{smallmatrix}k-1\\ p\end{smallmatrix}\right]q^{k-1}}\,x_i y_l=\sum_{i=1}^{\infty}x_i y_i$$

wird. Dann ist

$$(19)\quad \Phi(x,y)=\Psi(x,y)$$

und daher

$$(20)\quad \xi_k=q^{k-1}\zeta_k=\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{kl}\,q^{l-1}\left[\begin{smallmatrix}l-1\\ p\end{smallmatrix}\right]y_l=\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{kl}\,f^{(l-1)}(x).$$

§ 2.

Bestimmung der vorderen Reziproken.

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten der Bilinearformen in (18) erhält man wegen (10) für $\begin{matrix}i=1,2,\dots\\ l=1,2,\dots\end{matrix}$

$$(21)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{p}g^{(\mu)}_{l+\mu-k+1}(x)\binom{k-1}{\mu}\varphi_{ik}=\delta_{li}\quad(\delta_{ii}=1,\ \delta_{li}=0\ \text{für}\ l\neq i).$$

Setzt man bei festgehaltenem i

$$(22)\quad \varphi_i(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{ik}\,z^{k-1},$$

so genügt $\varphi_i(z)$ der Differentialgleichung

$$(23)\quad L(\varphi_i(z))\equiv\sum_{\mu=0}^{p}\frac{1}{\mu!}\,\frac{d^{\mu}g(x,z)}{dx^{\mu}}\,\frac{d^{\mu}\varphi_i(z)}{dz^{\mu}}=z^{i-1}.$$

In der Tat erhält man durch Einsetzen von (22) in (23) nach (5)

$$\sum_{\mu=0}^{p}\sum_{l=1}^{\infty} g_l^{(\mu)}(x)\, z^{l-1} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{ik}\, z^{k-\mu-1} \binom{k-1}{\mu} = z^{i-1} \tag{24}$$

oder

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{p} g_{l-k+\mu+1}^{(\mu)}\, \varphi_{ik} \binom{k-1}{\mu} z^{l-1} = z^{i-1}. \tag{25}$$

Indem man in (25) die Koeffizienten der Potenzen von z auf beiden Seiten gleichsetzt, erhält man das Gleichungssystem (21) für die Koeffizienten der p Integrale von (23), die sich in der Form (22) darstellen lassen.

Um (23) bequem integrieren zu können, machen wir folgende Umformung: Es ist nach (5)

$$\begin{aligned} L(\varphi(z)) &= \sum_{\mu=0}^{p}\sum_{\nu=1}^{p+1} h_\nu(z)\, x^{\nu-\mu-1} \binom{\nu-1}{\mu} \frac{d^\mu \varphi(z)}{dz^\mu} \\ &= e^{-xz} \sum_{\nu=1}^{p+1} h_\nu(z) \frac{d^{\nu-1}(e^{xz}\varphi(z))}{dz^{\nu-1}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Setzt man vorübergehend

$$e^{xz}\varphi_i(z) = X_i(z), \tag{27}$$

so geht (23) über in

$$\sum_{\nu=1}^{p+1} \frac{h_\nu(z)}{h_{p+1}(z)} \frac{d^{\nu-1} X_i(z)}{dz^{\nu-1}} = \frac{e^{xz} z^{i-1}}{h_{p+1}(z)}. \tag{28}$$

Es seien nun

$$\Phi_1(z),\ \Phi_2(z),\ \ldots,\ \Phi_p(z) \tag{29}$$

p linear unabhängige Integrale der (28) entsprechenden homogenen Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=1}^{p+1} \frac{h_\nu(z)}{h_{p+1}(z)} \frac{d^{\nu-1}\Phi(z)}{dz^{\nu-1}} = 0. \tag{30}$$

Wir bestimmen dann p Funktionen

$$\Psi_1(z),\ \Psi_2(z),\ \ldots,\ \Psi_p(z) \tag{31}$$

durch die p Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{d^{l-1}\Phi_k(z)}{dz^{l-1}} \Psi_k(z) = \delta_{lp} \tag{32}$$

$$(l = 1, 2, \ldots,\ \delta_{pp} = 1,\ \delta_{lp} = 0, \text{ wenn } l \neq p).$$

Die Funktionen $\Psi_k(z)$ genügen[5]) der zu (30) adjungierten Differentialgleichung

$$(33)\qquad \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}\left(\frac{h_k(z)}{h_{p+1}(z)}\Psi(z)\right)}{dz^{k-1}}=0.$$

Dann ist das allgemeine Integral[5]) von (23)

$$(34)\qquad \varphi_i(z)=e^{-sz}\sum_{\nu=1}^{p}\Phi_\nu(z)\int_0^z\frac{z^{i-1}e^{sz}}{h_{p+1}(z)}\Psi_\nu(z)\,dz+\sum_{\mu=1}^{p}\gamma_\mu\Phi_\mu(z)e^{-sz},$$

wobei γ_μ Integrationskonstanten in bezug auf z sind, die so zu bestimmen sind, daß die Potenzreihe (22) für $\varphi_i(z)$ einen möglichst großen Konvergenzradius hat.

Wir machen nun neben der in der Einleitung erwähnten Annahme a), daß die Gleichung (6) nur einfache Wurzeln z_σ habe, die Annahme

b) *In dem zur singulären Stelle* z_σ *der Differentialgleichung* (30) *gehörigen Integrale*

$$(35)\qquad \Phi_1(z_\sigma,z)=(z-z_\sigma)^{-\varrho_\sigma}\mathfrak{P}(z-z_\sigma)$$

sei ϱ_σ *keine ganze Zahl.*

Man kann nun ein Fundamentalsystem

$$(36)\qquad \Phi_1(z_\sigma,z),\ \Phi_2(z_\sigma,z),\ \ldots,\ \Phi_p(z_\sigma,z)$$

von (30) derart angeben, daß alle diese Integrale mit Ausnahme von $\Phi_1(z_\sigma,z)$ in z_σ regulär sind. Es ist dann

$$(37)\qquad \Phi_\nu(z)=\sum_{\mu=1}^{p}c_{\nu\mu}^{(\sigma)}\Phi_\mu(z_\sigma,z),$$

wobei die $c_{\nu\mu}^{(\sigma)}$ Konstanten sind.

Bildet man entsprechend (32) das zu den Funktionen (36) adjungierte Fundamentalsystem

$$(38)\qquad \Psi_1(z_\sigma,z),\ \Psi_2(z_\sigma,z),\ \ldots,\ \Psi_p(z_\sigma,z),$$

so folgt aus (32)[6])

$$(39)\qquad \Psi_\mu(z_\sigma,z)=\sum_{\nu=1}^{p}c_{\nu\mu}^{(\sigma)}\Psi_\nu(z).$$

Normiert man daher die Funktionen $\Psi_\nu(z)$ von Anfang an so, daß

---

[5]) L. Schlesinger, Handbuch der linearen Differentialgleichungen 1, S 62, 69 u. 78.

[6]) Die Φ_ν und Ψ_ν erleiden nach ihrer Definition kontragrediente Substitutionen. Schlesinger, l. c., S. 66.

$$(40)\quad \left(\frac{d^{\mu-1}\Psi_\nu(z)}{dz^{\mu-1}}\right)_{z=0}=\delta_{\mu\nu}\quad \left(\begin{matrix}\mu=1,2,\ldots,p,\\ \nu=1,2,\ldots,p,\end{matrix}\quad \delta_{\mu\mu}=1,\ \delta_{\mu\nu}=0 \text{ für } \mu\neq\nu\right)$$

ist, so wird

$$(41)\quad \left(\frac{d^{\nu-1}\Psi_\mu(z_\sigma,z)}{dz^{\nu-1}}\right)_{z=0}=c_{\nu\mu}^{(\sigma)}.$$

$\Psi_1(z_\sigma, z)$ hat in z_σ eine singuläre Stelle und wird bei einem Umlaufe von z um z_σ mit $e^{2\pi\sqrt{-1}\varrho_\sigma}$ multipliziert; dagegen verhalten sich die Funktionen $\frac{\Psi_\mu(z_\sigma,z)}{h_{p+1}(z)}$ für $\mu=2,\ldots,p$ in z_σ regulär, da die Differentialgleichung (33) als Differentialgleichung für die Funktionen $\frac{\Psi(z)}{h_{p+1}(z)}$ aufgefaßt werden kann und in z_σ nur eine einfache singuläre Stelle hat. Aus den (32) entsprechenden Gleichungen folgt nämlich sofort, daß nur für $\mu=1$ $\frac{\Psi_\mu(z_\sigma,z)}{h_{p+1}(z)}$ in z_σ verzweigt ist. Nach (37) und (39) ist nun

$$(42)\quad \varphi_i(z)=e^{-xz}\sum_{\nu=1}^{p}\Phi_\nu(z_\sigma,z)\int_0^z\frac{z^{i-1}e^{xz}}{h_{p+1}(z)}\Psi_\nu(z_\sigma,z)\,dz$$
$$+\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p}\gamma_\mu c_{\mu\nu}^{(\sigma)}\Phi_\nu(z_\sigma,z)\,e^{-xz}.$$

Durch Potenzreihenentwicklung nach $z-z_\sigma$ zeigt man wie in I S. 9, daß $\varphi_i(z)$ in z_σ regulär ist, wenn es bei einem Umlaufe um z_σ sich nicht ändert. Bezeichnet man $\varphi_i(z)$ nach einem Umlauf von z um z_σ entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn mit $\bar{\varphi}_i(z)$, so ist

$$(43)\quad \bar{\varphi}_i(z)-\varphi_i(z)=e^{-xz}\Phi_1(z_\sigma,z)\,e^{-2\pi\sqrt{-1}\varrho_\sigma}\int_{C_\sigma}\frac{z^{i-1}e^{xz}}{h_{p+1}(z)}\Psi_1(z_\sigma,z)\,dz$$
$$+\left(e^{-2\pi\sqrt{-1}\varrho_\sigma}-1\right)\sum_{\mu=1}^{p}\gamma_\mu c_{\mu 1}^{(\sigma)}e^{-xz}\Phi_1(z_\sigma,z),$$

wenn C_σ ein von Null ausgehender, z_σ entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn verlaufender, nach Null zurückgehender Schleifenweg ist. $\varphi_i(z)$ ist also für $z=z_\sigma$ regulär, wenn

$$(44)\quad \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{-1}\varrho_\sigma}-1}\int_{C_\sigma}e^{xz}z^{i-1}\frac{\Psi_1(z_\sigma,z)}{h_{p+1}(z)}\,dz=\sum_{\mu=1}^{p}\gamma_\mu c_{\mu 1}^{(\sigma)}$$

ist. Setzen wir also voraus, daß die Determinante

$$(45)\quad |c_{\mu 1}^{(\sigma)}|\neq 0\qquad \left(\begin{matrix}\mu=1,2,\ldots,p\\ \sigma=1,2,\ldots,p\end{matrix}\right),$$

machen wir also nach (41) die Annahme[7]):

---

[7]) Diese Bedingung ist eine notwendige, da sonst (30) ein für $|z|<q$ reguläres Integral hat, also sicher keine eindeutig bestimmte vordere Reziproke existiert.

c) *Es sei die Funktionaldeterminante der p Funktionen $\Psi_1(z_1, z)$, $\Psi_1(z_2, z), \ldots, \Psi_1(z_p, z)$ für $z = 0$ ungleich Null,*
so können wir die p Konstanten γ_μ aus (44) für $\sigma = 1, 2, \ldots, p$ berechnen. Wählt man also q so groß, daß

$$(46) \qquad |z_\sigma| < q \text{ für } \sigma = 1, 2, \ldots, p, \quad |z_{p+1}| > q,$$

so folgt genau wie in I S. 12

$$(47) \qquad \varphi_l(q e^{\sqrt{-1}\,\vartheta}) = O\left(\frac{q^l}{l}\right) \text{ für } 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi,$$

und dasselbe gilt wegen (32) und (34) für die $p-1$ ersten Ableitungen von $\varphi_l(z)$. Die p-te Ableitung kann man nach (23) durch Funktionen ausdrücken, deren Größenordnung bekannt ist, da sich die an den Stellen z_σ unendlich werdenden Größen wegheben. Es lassen sich daher die Schlüsse von I S. 15, 16 bzw. 28 übertragen, woraus wegen (46) die Existenz einer und nur einer beschränkten vorderen Reziproken $\Psi(x, y)$ und damit auch die von $\Phi(x, y)$ folgt. Es folgt also genau wie in I S. 13: Ist

$$(48) \qquad \overline{\lim_{l \to \infty}} \sqrt[l]{\left|\frac{d^l f(x)}{dx^l}\right|} < q,$$

so gibt es nur das Lösungssystem

$$(49) \qquad \xi_k = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{kl} f^{(l-1)}(x),$$

für das

$$(50) \qquad \overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|\xi_k|} \leqq q.$$

Es bleibt also nur mehr zu zeigen, daß

$$(51) \qquad \frac{d\xi_k}{dx} = \xi_{k+1}$$

ist. Es ist aber

$$(52) \qquad \frac{d\xi_k}{dx} = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{d\varphi_{kl}}{dx} + \varphi_{kl-1}\right) f^{(l-1)}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \chi_{k+1\,l} f^{(l-1)}(x),$$

also (51) sicher erfüllt, wenn

$$(53) \qquad \frac{d\varphi_k(z)}{dz} + z\varphi(z) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} \chi_{k+1\,l} z^{l-1} \equiv \chi_{k+1}(z) = \varphi_{k+1}(z)$$

ist. Nun ist aber nach (26)

$$(54) \qquad \frac{d}{dz}\Big[L(\varphi(z))\Big] = -zL(\varphi(z)) + L\left[\frac{d\varphi(z)}{dz} + z\varphi(z)\right],$$

so daß man genau entsprechend I (56) erhält

$$L\left[\frac{d\varphi(z)}{dz} + z\varphi(z)\right] = \frac{d}{dz}[L(\varphi(z))] + zL(\varphi(z)). \tag{55}$$

Es ist daher

$$L(\chi_{k+1}(z)) = \frac{d}{dz} z^k + z^{k+1} = z^{k+1}, \tag{56}$$

und da $\chi_{k+1}(z)$ für $|z| < q$ regulär ist, muß es mit $\varphi_{k+1}(z)$ identisch sein. Man erhält also wie in I S. 13

Satz 1. *Gibt es genau* p *Wurzeln der Gleichung* (6), *deren absolute Beträge kleiner als* q *sind, sind ferner die Annahmen* a), b) *und* c) *sowie* (48) *erfüllt, so hat die Differentialgleichung* (1) *ein und nur ein Integral* y, *für welches*

$$\varlimsup_{i\to\infty} \sqrt[i]{\left|\frac{d^i y(x)}{dx^i}\right|} \leq q \tag{57}$$

ist.

Kapitel II.

Abtrennung der Glieder $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ in dem Gleichungssysteme (4).

§ 1.

Aufstellung der vorderen Reziproken. Beweis des Hauptsatzes.

Wir nehmen an, $g(x, z)$ sei regulär für $|z| \leq |z_{n+p+1}|$, wobei z_ν die dem absoluten Betrage nach geordneten Wurzeln von (6) sind. Es sei ferner jetzt

$$|z_{n+p}| < q < |z_{n+p+1}|, \tag{58}$$

$$\varlimsup_{i\to\infty} \sqrt[i]{\left|\frac{d^i f(x)}{dx^i}\right|} < q, \tag{59}$$

und es seien schließlich die Annahmen a) und b) erfüllt.

Wir betrachten das aus (4) hervorgehende Gleichungssystem

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{i-1} \binom{i-1}{\mu} g^{(\mu)}_{k+\mu-i+1}(x)\xi_k \tag{60}$$

$$= f^{(i-1)}(x) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{i-1} \binom{i-1}{\mu} g^{(\mu)}_{k+\mu-i+1}(x)\xi_k$$

$$(i = 1, 2, \ldots).$$

Aus den Bemerkungen, die wir in Anschluß an (4) machten, folgt, daß die Zusatzglieder auf der rechten Seite für $i > n + p$ wegfallen.

Wir setzen

$$\frac{d^{n+k-1}y}{dx^{n+k-1}} = \xi_{n+k} = q^{n+k-1}\zeta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{61}$$

$$\frac{1}{\begin{bmatrix} i-1 \\ p \end{bmatrix} q^{i-1}}\left\{f^{(i-1)}(x) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{p}\binom{i-1}{\mu} g^{(\mu)}_{k+\mu-i+1}(x)\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}\right\} = y_i. \tag{62}$$

Es ist dann zu der beschränkten Bilinearform

$$A(x,\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{p}\frac{\binom{i-1}{\mu} g^{(\mu)}_{k+n+\mu-i+1}\, q^{n+k-1}}{\begin{bmatrix} i-1 \\ p \end{bmatrix} q^{i-1}}\, x_i \zeta_k \tag{63}$$

die hintere Reziproke

$$\Psi(\zeta, y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_{n+ik}\, q^{k-1}\begin{bmatrix} k-1 \\ p \end{bmatrix}}{q^{n+i-1}}\, \zeta_i y_k \tag{64}$$

so zu bestimmen, daß

$$A(x,\zeta)\,\Psi(\zeta, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{65}$$

wird. Existiert dann eine und nur eine beschränkte vordere Reziproke

$$\Phi(x,\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_{n+ik}\, q^{k-1}\begin{bmatrix} k-1 \\ p \end{bmatrix}}{q^{n+i-1}}\, x_i \zeta_k, \tag{66}$$

für die also

$$\begin{aligned} \Phi(x,\zeta)A(\zeta, y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{p} & \frac{\varphi_{n+ik}\, q^{k-1}\begin{bmatrix} k-1 \\ p \end{bmatrix}}{q^{n+i-1}} \\ & \times \frac{\binom{k-1}{\mu} g^{(\mu)}_{l+n+\mu-k+1}(x)\, q^{n+l-1}}{\begin{bmatrix} k-1 \\ p \end{bmatrix} q^{k-1}}\, x_i y_l = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \end{aligned} \tag{67}$$

ist, so erhält man für die gesuchten ζ_k

$$\begin{aligned} \zeta_k &= \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\varphi_{n+kl}\, q^{l-1}\begin{bmatrix} l-1 \\ p \end{bmatrix}}{q^{n+k-1}}\, y_l \\ &= \frac{1}{q^{n+k-1}}\left[\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{n+kl} f^{(l-1)}(x) - \sum_{\nu=1}^{n} E_{n+k\nu}\frac{d^{\nu-1}y}{dx^{\nu-1}}\right], \end{aligned} \tag{68}$$

wobei

$$E_{n+k\nu} = \sum_{l=1}^{n+p}\varphi_{n+kl}\sum_{\mu=0}^{p}\binom{l-1}{\mu} g^{(\mu)}_{\nu+\mu-l+1}(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{69}$$

ist. Es wird also

$$(70)\qquad \frac{d^n y}{dx^n}+E_{n+1n}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+E_{n+11}y=\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{n+1l}f^{(l-1)}(x),$$

$$(71)\qquad \xi_{n+k}+\sum_{\nu=1}^{n}E_{n+k\nu}\frac{d^{\nu-1}y}{dx^{\nu-1}}=\sum_{l=1}\varphi_{n+kl}f^{(l-1)}(x).$$

Es ist dann noch zu zeigen, daß in (71) ξ_{n+k} durch $\frac{d^{n+k-1}y}{dx^{n+k-1}}$ ersetzt werden kann.

Zur Bestimmung der φ_{n+ik} hat man nach (67) das Gleichungssystem

$$(72)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{p}g^{(\mu)}_{l+n+\mu-k+1}(x)\binom{k-1}{\mu}\varphi_{n+ik}=\delta_{li}\qquad (l=1,2,\ldots).$$

Dieses ist aber das Rekursionssystem für die Koeffizienten der (23) befriedigenden Potenzreihen, wobei aber die n ersten Zeilen fehlen und $n+i$ statt i zu nehmen ist. Setzt man daher

$$(73)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{n+ik}z^{k-1}=\varphi_{n+i}(z),$$

so genügt $\varphi_{n+i}(z)$ wegen (69) der Differentialgleichung

$$(74)\qquad L(\varphi_{n+i}(z))=z^{n+i-1}+\sum_{\lambda=1}^{p}E_{n+i\lambda}z^{\lambda-1}\qquad (i=1,2,\ldots),$$

und es entsteht die Aufgabe, die von x abhängigen Funktionen $E_{n+i\lambda}$ so zu bestimmen, daß (74) ein für $|z|<|z_{n+p+1}|$ reguläres Integral hat. Nun läßt sich aber das allgemeine Integral von (74) entsprechend (34) in der Form

$$(75)\qquad \varphi_{n+i}(z)=e^{-xz}\sum_{\nu=1}^{p}\Phi_\nu(z)\int_0^z e^{xz}\left(z^{n+i-1}+\sum_{\lambda=1}^{n}E_{n+i\lambda}z^{\lambda-1}\right)\frac{\Psi_\nu(z)}{h_{p+1}(z)}dz$$
$$+\sum_{\mu=1}^{p}\gamma_\mu\,\Phi_\mu(z)\,e^{-xz}$$

darstellen, wobei die γ_μ Integrationskonstanten in bezug auf z sind. Entsprechend (44) muß also sein

$$(76)\qquad \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{-1}\varrho_\sigma}-1}\int_{C_\sigma}e^{xz}\left(z^{n+i-1}+\sum_{\lambda=1}^{n}E_{n+i\lambda}z^{\lambda-1}\right)\frac{\Psi_1(z_\sigma,z)}{h_{p+1}(z)}dz=\sum_{\mu=1}^{p}\gamma_\mu c^{(\sigma)}_{\mu 1}$$
$$(\sigma=1,2,\ldots,p+n).$$

Wir setzen nun

$$(77)\qquad \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{-1}\varrho_\sigma}-1}\int_{C_\sigma}e^{xz}\frac{\Psi_1(z_\sigma,z)}{h_{p+1}(z)}dz=T_\sigma(x),$$

dann geht (76) über in

$$\frac{d^{n+i-1} T_\sigma}{d x^{n+i-1}} + \sum_{\lambda=1}^{n} E_{n+i\lambda} \frac{d^{\lambda-1} T_\sigma}{d x^{\lambda-1}} = \sum_{\mu=1}^{p} \gamma_\mu c_{\mu 1}^{(\sigma)}. \tag{78}$$

Aus dem bekannten Verhalten der Funktionen $T_\sigma(x)$ für große $|x|$ folgt, daß kein $T_\sigma(x)$ identisch verschwindet und daß zwischen endlich vielen T_σ keine homogene lineare Beziehung mit konstanten Koeffizienten besteht. Wir machen jetzt die Annahme[7])

c′) *Es gibt p Werte σ zwischen 1 und $p+n$, daß die Funktionaldeterminante der entsprechenden Funktionen $\Psi_1(z_\sigma, z)$ in $z = 0$ nicht verschwinde, daß also die Determinante $|c_{\mu 1}^{(\sigma)}|$ mit $\mu = 1, 2, \ldots, p$ von Null verschieden sei.*

Indem wir, um eine komplizierte Bezeichnung zu vermeiden, allenfalls die z_σ umordnen, dürfen wir annehmen, daß

$$|c_{\mu 1}^{(\sigma)}| \neq 0, \tag{79}$$

wo $|c_{\mu 1}^{(\sigma)}|$ die Determinante für $\begin{matrix} \mu = 1, 2, \ldots, p \\ \sigma = 1, 2, \ldots, p \end{matrix}$ ist.

Eliminiert man unter dieser Annahme die γ_μ zwischen den p ersten Gleichungen (78) und je einer folgenden, und setzt man

$$\begin{vmatrix} T_1 & c_{11}^{(1)} & c_{21}^{(1)} & \ldots c_{p1}^{(1)} \\ T_2 & c_{11}^{(2)} & c_{21}^{(2)} & \ldots c_{p1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \\ T_p & c_{11}^{(p)} & c_{21}^{(p)} & \ldots c_{p1}^{(p)} \\ T_{p+\varkappa} & c_{11}^{(p+\varkappa)} & c_{21}^{(p+\varkappa)} & \ldots c_{p1}^{(p+\varkappa)} \end{vmatrix} = Y_\varkappa, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n), \tag{80}$$

so ist kein $Y_\varkappa$ wegen (79) identisch Null und man erhält zur Bestimmung der $E_{n+i\lambda}$ die n Gleichungen

$$\frac{d^{n+i-1} Y_\varkappa}{d x^{n+i-1}} + \sum_{\lambda=1}^{n} E_{n+i\lambda} \frac{d^{\lambda-1} Y_\varkappa}{d x^{\lambda-1}} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n). \tag{81}$$

Die $Y_\varkappa$ sind ganze transzendente Funktionen von x, deren Funktionaldeterminante nicht identisch verschwindet, und es folgt wie bei I (62)

$$\frac{d^{n+i-1} Y_\varkappa}{d x^{n+i-1}} = O\left(\frac{q^i}{i}\right). \tag{82}$$

Die $E_{n+i\lambda}$ werden aus (81) als meromorphe Funktionen erhalten. Die Pole sind die Nullstellen der Funktionaldeterminante der Funktionen $Y_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$. Nach Ausschließung dieser Pole durch kleine Kreise

erhält man, sofern $|x|$ nur unter einer beliebig großen, aber festen Zahl liegt,

$$E_{n+i\lambda} = O\left(\frac{q^i}{i}\right). \tag{83}$$

Ferner erhält man genau wie in I (205)

$$E_{n+i+1\lambda} = E'_{n+i\lambda} + E_{n+i\lambda-1} - E_{n+in} E_{n+1\lambda}. \tag{84}$$

Durch nahezu wörtliche Übertragung von I Kap. III § 2, wobei L jetzt durch (26) definiert ist, statt z_1 immer $z_1, z_2, \ldots, z_p$ zu setzen ist, zeigt man, daß das allgemeine Integral von (70) eine ganze transzendente Funktion ist, die sich in der Form

$$y = \sum_{l+1}^{\infty} \varphi^*_{1l} f^{(l-1)}(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j Y_j(x) \tag{85}$$

darstellen läßt, wobei die c_j Integrationskonstanten sind. Dabei kann man die explizite Berechnung von $\varphi^*_1(z)$ ab I (220) durch den Schluß umgehen, daß in dem I (212) und (213) entsprechenden Systeme von linearen Differentialgleichungen mit der unabhängigen Veränderlichen x auch jetzt alle Koeffizienten in bezug auf z für $|z| < |z_{n+p+1}|$ regulär sind. Ebenso läßt sich der Schluß von I Kap. III § 1 und der ganze § 3 jetzt fast wörtlich übertragen, so daß man erhält

Satz 2. *Gibt es genau* $p + n$ *Wurzeln der Gleichung* (6), *deren absolute Beträge kleiner als* q *sind, sind ferner die Annahmen* a), b) *und* c′) *sowie* (59) *erfüllt, so ist das allgemeinste Integral* y *von* (1), *für welches*

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{\left|\frac{d^i y}{dx^i}\right|} \leqq q \tag{86}$$

ist, durch (85) *gegeben.* Es bleibt uns nur übrig zu zeigen, wie man die $Y_x(x)$ andererseits durch die Laplacesche Transformation als Integrale der zu (1) gehörigen homogenen Differentialgleichung erhält.

§ 2.

Die Laplacesche Transformation*).

Wir versuchen, die zu (1) gehörige homogene Differentialgleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} = 0 \tag{87}$$

*) L. Schlesinger, Handbuch 1, S. 414 f.

durch eine Summe von Integralen der Form

$$(88)\qquad T = \int\limits_C e^{xz} \frac{\Psi(z)}{h_{p+1}(z)} dz$$

zu integrieren, wo C geschlossene Wege in der komplexen z-Ebene, Ψ noch näher zu bestimmende Funktionen sind. Nun ist

$$(89)\qquad \frac{d^{k-1}T}{dx^{k-1}} = \int\limits_C z^{k-1} e^{xz} \frac{\Psi(z)}{h_{p+1}(z)} dz,$$

$$(90)\qquad x^{r-1}\frac{d^{k-1}T}{dx^{k-1}} = \int\limits_C x^{r-1} z^{k-1} e^{xz} \frac{\Psi(z)}{h_{p+1}(z)} dz = \int\limits_C \frac{d^{r-1} e^{xz}}{dz^{r-1}} \frac{z^{k-1}\Psi(z)}{h_{p+1}(z)} dz$$

$$= \left[\sum_{s=1}^{r-1} (-1)^{s-1} \frac{d^{r-s-1} e^{xz}}{dz^{r-s-1}} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\left(\frac{z^{k-1}\Psi(z)}{h_{p+1}(z)}\right)\right]$$

$$+ (-1)^{r-1} \int\limits_C e^{xz} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left(z^{k-1}\frac{\Psi(z)}{h_{p+1}(z)}\right) dz,$$

wobei in [ ] die Differenz der Wert im Endpunkt und Anfangspunkt von C zu nehmen ist. Setzt man T in (87) ein und sieht zunächst von dem Beitrage der [ ] ab, so wird (87) erfüllt sein, wenn $\Psi(z)$ der Differentialgleichung

$$(91)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{p+1} \alpha_{kr} (-1)^{r-1} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left(z^{k-1}\frac{\Psi(z)}{h_{p+1}(z)}\right) = 0$$

genügt. Nun ist aber nach (5)

$$(92)\qquad \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{kr} z^{k-1} = h_r(z),$$

also geht (91) über in

$$(93)\qquad \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{r-1} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left(\frac{h_r(z)}{h_{p+1}(z)}\Psi(z)\right) = 0,$$

also genau in (33). Um den Beitrag der [ ] beim Einsetzen in (87) zum Verschwinden zu bringen, setzen wir nach (77) unter Zugrundelegung der Annahme c′ nach entsprechender Umnumerierung der z_σ

$$(94)\qquad y_\varkappa = \sum_{\sigma=1}^{p} \gamma_\sigma T_\sigma + \gamma_{p+\varkappa} T_{p+\varkappa}.$$

Der Beitrag der [ ] beim Einsetzen von $y_\varkappa$ in (87) fällt weg, wenn wir die γ_σ so bestimmen, daß

$$(95)\qquad \sum_{\sigma=1}^{p} \frac{\gamma_\sigma}{e^{2\pi\sqrt{-1}\varrho^\sigma} - 1}\left[\frac{d^{s-1}\Psi_1(z_\sigma, z)}{dz^{s-1}}\right]_{z=0}^{z=0} + \frac{\gamma_{p+\varkappa}}{e^{2\pi\sqrt{-1}\varrho_{p+\varkappa}} - 1}\left[\frac{d^{s-1}\Psi_1(z_{p+\varkappa}, z)}{dz^{s-1}}\right]_{z=0}^{z=0} = 0$$

$$(s = 1, 2, \ldots, p)$$

ist, wobei in $[\,]_{z=0}^{z=0}$ jeweils die Differenz der Werte nach und vor dem Umlauf um die betreffende singuläre Stelle zu nehmen ist. Nach (41) und der unmittelbar darauf folgenden Bemerkung geht also (95) über in

$$\sum_{\sigma=1}^{p} \gamma_\sigma c_{s1}^{(\sigma)} + \gamma_{p+\varkappa} c_{s1}^{(p+\varkappa)} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, p). \tag{96}$$

Setzt man $\gamma_{p+\varkappa} = 1$ und eliminiert man die γ_ϱ aus (94) und (96), so erhält man

$$y_\varkappa \, |c_{s1}^{(\sigma)}| = (-1)^p \begin{vmatrix} T_1 \ldots & T_p & T_{p+\varkappa} \\ c_{11}^{(1)} & c_{11}^{(p)} & c_{11}^{(p+\varkappa)} \\ c_{p1}^{(1)} & c_{p1}^{(p)} & c_{p1}^{(p+\varkappa)} \end{vmatrix}, \tag{97}$$

wo $|c_{s1}^{\sigma}|$ die Determinante für $\begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots, p \\ \sigma = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$ ist, die als von Null verschieden angenommen ist.

Die $y_\varkappa$ sind also bis auf einen konstanten Faktor mit den durch (80) definierten Funktionen $Y_\varkappa$ identisch.

(Eingegangen am 19. 2. 1921.)

Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten.

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

§ 1.

Die Aufgabe und Zusammenstellung der Resultate.

Die von Herrn Hilb in zwei gleichbetitelten Arbeiten[1]) untersuchte Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung soll im folgenden auf neue Art behandelt werden. Dabei wird die Laplacesche Transformation nicht benutzt, und die bei ihrer Verwendung auftretenden Ausnahmefälle werden restlos und einheitlich miterledigt. Die Methode ist ganz elementar und setzt auch von der allgemeinen Theorie der unendlichen Matrices nichts voraus. Auf eine dritte Art hat Herr Helge von Koch in einer Arbeit, die während der Drucklegung der gegenwärtigen erschienen ist, das Problem angegriffen[2]).

Ist $f(x)$ eine ganze (rationale oder transzendente) Funktion, so läßt sich in wenigen Zeilen beweisen, daß der Ausdruck

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|f^{(\nu)}(x)|}$$

für alle x den gleichen Wert hat[3]). Wir nennen ihn die *Stufe* der Funktion $f(x)$. Die Stufe kann auch ∞ sein; doch beschäftigen wir uns in dieser Arbeit nur mit Funktionen endlicher Stufe.

Man erkennt sofort die Richtigkeit der folgenden Sätze:

A. Ist $f(x)$ von der Stufe q, so sind auch alle Ableitungen $f^{(\mu)}(x)$ von der Stufe q.

---

[1]) Die erste steht Math. Annalen 82 (1920), S. 1—39; die zweite geht der gegenwärtigen Arbeit unmittelbar voran.

[2]) H. von Koch: Sur les équations différentielles linéaires d'ordre infini. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 16 (1921).

[3]) Vgl. die Einleitung der ersten Hilbschen Arbeit.

B. Sind $f_1(x)$, $f_2(x)$ zwei Funktionen, deren Stufen $\leqq q$ sind, so ist $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ ebenfalls höchstens von der Stufe q.

C. Ist $f(x)$ von der Stufe q, so ist $f(ax)$ von der Stufe $|a|q$.

D. Ist $f_1(x)$ von der Stufe q_1, $f_2(x)$ von der Stufe q_2, so ist das Produkt $f_1(x) f_2(x)$ höchstens von der Stufe $q_1 + q_2$.

E. Die ganzen rationalen Funktionen sind von der Stufe Null.

F. Die Funktion $e^{\sigma x}$ ist von der Stufe $|\sigma|$.

Nach diesen Vorbemerkungen stellen wir im Anschluß an Herrn Hilb folgende *Aufgabe*[4]):

In der Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x)\, y^{(\nu)} = f(x)$$

sei $f(x)$ eine ganze Funktion höchstens von der Stufe q. Die $g_\nu(x)$ seien Polynome vom höchstens p-ten Grad

$$(2) \qquad g_\nu(x) = \alpha_{\nu 0} + \alpha_{\nu 1} x + \ldots + \alpha_{\nu p} x^p \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

und zwar mindestens eines *genau* vom p-ten Grad[5]). Dabei seien die Koeffizienten $\alpha_{\nu\lambda}$ so beschaffen, daß die $p+1$ Funktionen

$$(3) \qquad h_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu\lambda} z^\nu \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, p)$$

für $|z| \leqq q$ regulär sind (die Konvergenzradien also *größer* als q). Die Funktion $h_p(z)$ verschwindet, da mindestens ein $g_\nu(x)$ genau vom p-ten Grad ist, nicht identisch; die Anzahl ihrer Nullstellen im Bereich $|z| \leqq q$ sei n (mehrfache mehrfach gezählt). Gesucht sind Integrale der Differentialgleichung (1), die ganze Funktionen höchstens von der Stufe q sind.

Zunächst mögen die Ergebnisse in zwei Sätzen formuliert werden. Der erste bezieht sich auf die *homogene* Differentialgleichung, d. h. bei der $f(x) = 0$ ist.

Satz 1. *Die homogene Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung hat genau $n - p + s$ linear unabhängige Integrale, deren Stufe $\leqq q$ ist.*

---

[4]) Um den Vergleich mit der zweiten Hilbschen Arbeit zu erleichtern, habe ich mich ihr in der Bezeichnung möglichst angeschlossen. Doch schien mir eine Indexverschiebung zweckmäßig, derzufolge meine $g_\nu(x)$, $h_\lambda(z)$, $\alpha_{\nu\lambda}$ mit den Hilbschen $g_{\nu+1}(x)$, $h_{\lambda+1}(z)$, $\alpha_{\nu+1,\lambda+1}$ identisch werden; außerdem ist meine Anzahl n die Hilbsche Anzahl $n+p$.

[5]) Es ist nicht ausgeschlossen, daß $g_\nu(x)$ für alle hinreichend großen ν identisch verschwindet, so daß die Differentialgleichung (1) nur von endlicher Ordnung ist. Auch für Differentialgleichungen endlicher Ordnung sind die Resultate dieser Arbeit neu und nicht trivial.

Dabei bedeutet s die Anzahl der linear unabhängigen im Bereich $|z| \leqq q$ regulären Integrale der linearen Hilfsdifferentialgleichung p-ter Ordnung:

$$\sum_{\lambda=0}^{p} h_\lambda(z) \frac{d^\lambda \varphi(z)}{d z^\lambda} = 0.$$

Naturgemäß ist $0 \leqq s \leqq p$, so daß mindestens $n-p$ und höchstens n Integrale vorhanden sind. Der zweite Satz bezieht sich auf die inhomogene Differentialgleichung und lautet[6]):

Satz 2. *Die Differentialgleichung* (1) *hat dann und nur dann bei jeder Wahl der Funktion $f(x)$, deren Stufe $\leqq q$ ist, Integrale y, deren Stufe $\leqq q$ ist, wenn die betreffende homogene Differentialgleichung genau $n-p$ Integrale hat, d. h. nach Satz* 1, *wenn die dort angegebene Hilfsdifferentialgleichung kein im ganzen Bereich $|z| \leqq q$ reguläres Integral hat.*

Das allgemeine Integral y hat dann die Form

$$y = y_0 + C_1 y_1 + \ldots + C_{n-p} y_{n-p},$$

wo y_0 ein beliebiges Partikulärintegral ist, und $y_1, \ldots, y_{n-p}$ die Integrale der homogenen Differentialgleichung sind, die aber im Fall $n = p$ natürlich wegfallen. $C_1, \ldots, C_{n-p}$ sind willkürliche Konstanten.

Der zweite Teil von Satz 2 bedarf, wenn alles andere bewiesen ist, natürlich keines Beweises mehr; er ist nur der Vollständigkeit halber hergesetzt.

Beim Beweis der beiden Sätze genügt es offenbar, sich auf den Fall $q = 1$ zu beschränken, da der allgemeine Fall, wie man sofort sieht, aus diesem hervorgeht, indem man x durch qx ersetzt.

---

[6]) Diesen Satz hatte ich bei der ursprünglichen (am 22. 3. 1921 bei der Redaktion eingegangenen) Fassung meines Manuskriptes als Vermutung ausgesprochen; der Beweis war mir nur mit gewissen Einschränkungen gelungen. Auch Satz 1 hatte ich nur dahin formuliert und bewiesen, daß mindestens $n-p$ und höchstens n Integrale vorhanden sind. Als ich bald darauf den ganzen Beweis beider Sätze fand, habe ich mein Manuskript von der Redaktion zurückerbeten und entsprechend abgeändert. Mittlerweile hatte ich Herrn Hilb von meinem ursprünglichen Manuskript Kenntnis gegeben, und es ist ihm gelungen, durch eine Verschmelzung seiner und meiner Methode gleichzeitig mit mir ans selbe Ziel zu gelangen (vgl. seine dritte Mitteilung). Unsere Beweise der beiden Sätze stimmen in den meisten Zwischenstationen überein; doch werden die einzelnen Teilstrecken auf verschiedenen Wegen durchlaufen. (25. 4. 1921.) — Herr von Koch führt a. a. O. statt meiner Hilfsdifferentialgleichung die dazu adjungierte ein. Er gelangt, soviel ich sehe, ebenfalls zum Satz 2, während er an Stelle von Satz 1 nur findet, daß mindestens $n-p$ Integrale vorhanden sind.

§ 2.

Ein Hilfssatz über Summengleichungen.

Die Grundlage meiner Methode ist der folgende Hilfssatz, den ich kürzlich auf ganz elementare Weise bewiesen habe[7]):

Hilfssatz. *Die Koeffizienten der Summengleichung*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu + b_{\mu\nu})x_{\mu+\nu} = c_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

mögen die Bedingungen erfüllen:

$$\text{(I)} \qquad a_0 + b_{\mu 0} \neq 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(II)} & |a_\nu| \leqq G\,\vartheta^\nu \\ \text{(III)} & |b_{\mu\nu}| \leqq k_\mu\,\vartheta^\nu\end{array}\right\} \vartheta < 1,$$

$$\text{(IV)} \qquad \lim_{\mu=\infty} k_\mu = 0,$$

$$\text{(V)} \qquad \limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|c_\mu|} \leqq 1,$$

so daß jedenfalls die Funktion

$$\text{(VI)} \qquad F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

im Bereich $|z| \leqq 1$ *regulär ist. Ist* $n\,(\geqq 0)$ *die Anzahl ihrer Nullstellen in diesem Bereich (mehrfache mehrfach gezählt), so enthält die allgemeine Lösung der Summengleichung mit der Nebenbedingung*

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} \leqq 1$$

genau n willkürliche Konstanten $C_\varkappa$ *und hat die Form*

$$x_\nu = x_{\nu 0} + \sum_{\varkappa=1}^{n} C_\varkappa x_{\nu\varkappa}.$$

Ist M ein genügend großer Index, so gibt es eine und nur eine derartige Lösung, für welche die n Unbekannten $x_M, x_{M+1}, \ldots, x_{M+n-1}$ *vorgegebene Werte haben.*

Hiernach hat insbesondere die *homogene* Summengleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu + b_{\mu\nu})x_{\mu+\nu} = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

---

[7]) Über Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen. Dieser Band, S. 1. Der Hilfssatz ist der dortige Satz 2; sein Beweis ist in den §§ 1, 3, 4 enthalten, § 2 ist dafür entbehrlich.

genau n linear unabhängige Lösungen x_ν mit der Nebenbedingung

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} \leqq 1.$$

Wir bezeichnen diese (falls nicht $n = 0$ ist) mit $x_{\nu 1}, \ldots, x_{\nu n}$ und können sie etwa dadurch festlegen, daß wir für einen hinreichend großen, aber festen Index M

$$\begin{pmatrix} x_{M1}, & x_{M+1,1}, & \ldots, & x_{M+n-1,1} \\ x_{M2}, & x_{M+1,2}, & \ldots, & x_{M+n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{Mn}, & x_{M+1,n}, & \ldots, & x_{M+n-1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

setzen.

§ 3.

Beweis der beiden Sätze.

Nach der Schlußbemerkung des § 1 dürfen wir $q = 1$ setzen. In der Differentialgleichung (1) ist dann die ganze Funktion $f(x)$ höchstens von der Stufe 1; wenn also

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_\nu}{\nu!} x^\nu \tag{4}$$

gesetzt wird, so ist

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|d_\nu|} \leqq 1. \tag{5}$$

Gesucht werden Integrale y

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{D_\nu}{\nu!} x^\nu \tag{6}$$

der Differentialgleichung (1), deren Stufe ebenfalls $\leqq 1$ ist, so daß

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|D_\nu|} \leqq 1 \tag{7}$$

sein muß. Da ferner die $p+1$ Funktionen $h_\lambda(z)$ für $|z| \leqq 1$ regulär vorausgesetzt sind, ist

$$|\alpha_{\nu\lambda}| \leqq G\vartheta^\nu \qquad (\vartheta < 1). \tag{8}$$

Setzt man jetzt das Integral (6) in die Differentialgleichung (1) ein, so darf man wieder nach Potenzen von x ordnen. Dadurch erhält man zur Berechnung der Koeffizienten D_ν das Gleichungssystem:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu\lambda} D_\nu = d_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, p-1)^{8}), \tag{9}$$

[8]) Für $p = 0$ fallen die Gleichungen (9) natürlich weg.

$$(10) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + b_{\mu\nu}) D_{\mu+\nu} = c_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wobei die $\gamma_{\nu\lambda}$, a_ν, $b_{\mu\nu}$, c_μ die folgende Bedeutung haben:

$$(11) \qquad \gamma_{\nu\lambda} = \left(\alpha_{\nu\lambda} + \frac{\alpha_{\nu-1,\lambda-1}}{1!} + \ldots + \frac{\alpha_{\nu-\lambda,0}}{\lambda!}\right)\lambda!,$$

$$(12) \qquad a_\nu = \alpha_{\nu p},$$

$$(13) \qquad \begin{cases} b_{\mu 0} = 0, \\ b_{\mu\nu} = \dfrac{\alpha_{\nu-1,p-1}}{\mu+1} + \dfrac{\alpha_{\nu-2,p-2}}{(\mu+1)(\mu+2)} + \ldots + \dfrac{\alpha_{\nu-p,0}}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+p)} \quad (\text{für } \nu \geqq 1)^{9)}, \end{cases}$$

$$(14) \qquad c_\mu = \frac{\mu!}{(\mu+p)!} d_{\mu+p}.$$

Soweit die hier auftretenden α einen negativen ersten Index haben, sind sie durch Null zu ersetzen.

Hiernach ist wegen (8)

$$|a_\nu| \leqq G\vartheta^\nu, \qquad |b_{\mu\nu}| \leqq \frac{pG\vartheta^{\nu-p}}{\mu+1},$$

und wegen (14) und (5)

$$\limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|c_\mu|} \leqq 1.$$

Die Summengleichung (10) erfüllt somit gerade die Bedingungen unseres Hilfssatzes, wenn wir noch voraussetzen, daß $\alpha_{0p} \neq 0$ ist. *Diese Voraussetzung soll vorläufig gemacht werden,* wobei man beachte, daß sie von der Transformation, welche den allgemeinen Fall auf den Fall $q = 1$ zurückführt, unabhängig ist.

Nun untersuchen wir zunächst die *homogene* Differentialgleichung; sei also $f(x) = 0$, daher $d_\mu = 0$, $c_\mu = 0$. Dann ist die Summengleichung (10) ebenfalls homogen und sie hat nach unserem Hilfssatz genau n linear unabhängige Lösungen D_ν mit der Nebenbedingung (7), weil ja jetzt

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu p} z^\nu = h_p(z)$$

ist, also nach Voraussetzung n Nullstellen im Bereich $|z| \leqq 1$ hat. Diese n Lösungen seien, falls nicht $n = 0$ ist[10]), $D_{\nu 1}, \ldots, D_{\nu n}$; wir können sie dadurch festlegen, daß wir nach Wahl eines genügend großen Index M

---

[9]) Falls $p = 0$, ist $b_{\mu\nu} = 0$ zu setzen.

[10]) Für $n = 0$ hat (10) mit $c_\mu = 0$ nur die triviale Lösung $D_\nu = 0$. Also gibt es auch keine Integrale der homogenen Differentialgleichung außer $y = 0$. Damit ist für $n = 0$ der Satz 1 bereits bewiesen, da in diesem Fall offenbar $s = p$ ist.

$$(15)\qquad \begin{pmatrix} D_{M1}, & D_{M+1,1}, & \ldots, & D_{M+n-1,1} \\ D_{M2}, & D_{M+1,2}, & \ldots, & D_{M+n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{Mn}, & D_{M+1,n}, & \ldots, & D_{M+n-1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

setzen. Die allgemeine Lösung der (homogen gemachten) Summengleichung (10) mit der Nebenbedingung (7) ist dann

$$(16)\qquad D_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{n} C_\varkappa D_{\nu\varkappa},$$

wo $C_1, \ldots, C_n$ willkürliche Konstanten sind.

Nun sind aber noch die p Gleichungen (9) zu befriedigen[11]), die jetzt ebenfalls homogen sind ($d_\lambda = 0$). Setzt man in diese für D_ν den Ausdruck (16) ein, so ist die entstehende Reihe wegen (7) absolut konvergent, und man erhält zur Berechnung der n Konstanten $C_1, \ldots, C_n$ die p linearen homogenen Gleichungen

$$(17)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \omega_{\lambda\varkappa} C_\varkappa = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots p-1),$$

wobei

$$(18)\qquad \omega_{\lambda\varkappa} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu\lambda} D_{\nu\varkappa}.$$

Im nächsten Paragraphen werden wir die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (17)

$$(19)\qquad \begin{Vmatrix} \omega_{01}, & \omega_{02}, & \ldots, & \omega_{0n} \\ \omega_{11}, & \omega_{12}, & \ldots, & \omega_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p-1,1}, & \omega_{p-1,2}, & \ldots, & \omega_{p-1,n} \end{Vmatrix},$$

untersuchen und zeigen, daß ihr Rang gleich $p - s$ ist, wo s die in Satz 1 angegebene Bedeutung hat. Nehmen wir das vorläufig als bewiesen an, so bleiben von den Konstanten $C_\varkappa$ noch $n - p + s$ willkürlich. So groß ist also die Anzahl der linear unabhängigen Integrale (6), und damit ist Satz 1 bewiesen.[12])

Wir wenden uns jetzt zu der *inhomogenen* Differentialgleichung (1).

---

[11]) Der Fall $p = 0$ erübrigt sich. Denn weil dann offenbar auch $s = 0$ ist, weil außerdem die Gleichungen (9) wegfallen, also keine Bedingungen mehr zu befriedigen sind, ist Satz 1 für diesen Fall durch die vorausgehenden Betrachtungen schon erledigt.

[12]) Zunächst nur unter der Voraussetzung $a_{0p} \neq 0$, von der wir uns aber in § 5 befreien werden.

Dann hat die allgemeine Lösung der Summengleichung (10) nach unserem Hilfssatz die Form

$$D_\nu = D_{\nu 0} + \sum_{\varkappa=1}^{n} C_\varkappa D_{\nu\varkappa}.$$

Setzt man das in (9) ein, so ergeben sich für die n Konstanten $C_\varkappa$ wieder p lineare Gleichungen mit der Koeffizientenmatrix (19)[18]). Sie sind bekanntlich dann und nur dann bei *beliebiger* Wahl der Werte auf der rechten Seite auflösbar, wenn der Rang $p-s$ gleich p ist, also für $s=0$. Damit ist auch Satz 2 bewiesen[19]).

§ 4.

Der Rang der Matrix (19).

Es muß jetzt gezeigt werden, daß der Rang der Matrix (19) gleich $p-s$ ist. Zu dem Zweck betrachten wir wieder die homogen gemachten Gleichungen (9), (10), wo also $d_\lambda = 0$, $c_\mu = 0$ ist, und fragen, wie viele lineare Verbindungen der p Gleichungen (9) durch alle n Lösungen von (10) befriedigt werden. Sind $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}$ die Koeffizienten einer solchen linearen Verbindung, so handelt es sich also darum, ob die Gleichung

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_{\nu\lambda} D_\nu\Big) P_\lambda = 0$$

für alle n Lösungen $D_\nu = D_{\nu\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ erfüllt ist, ob also das Gleichungssystem besteht:

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1}\omega_{\lambda\varkappa} P_\lambda = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

wo $\omega_{\lambda\varkappa}$ wieder die in (18) angegebene Bedeutung hat.

Nun bestimmen wir gewisse Größen $P_p, P_{p+1}, \ldots$ rekursorisch aus dem Gleichungssystem

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1}\gamma_{\nu\lambda} P_\lambda = -\sum_{\mu=0}^{\nu}(a_{\nu-\mu} + b_{\mu,\nu-\mu})\frac{(\mu+p)!}{\mu!} P_{p+\mu}, \tag{21}$$

was wegen $a_0 + b_{\nu 0} = \alpha_{0p} \neq 0$ möglich ist. Setzt man hier für $\gamma_{\nu\lambda}$, $a_{\nu-\mu}$, $b_{\mu,\nu-\mu}$ die Werte aus (11), (12), (13) ein, so geht (21) über in:

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=0}^{p+\nu}[\alpha_{\nu-\mu,0} + \alpha_{\nu-\mu+1,1}\mu + \alpha_{\nu-\mu+2,2}\mu(\mu-1) + \ldots \\ + \alpha_{\nu-\mu+p,p}\mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)] P_\mu = 0 \\ (\nu = 0, 1, 2, \ldots).\end{aligned} \tag{21a}$$

---

[19]) Die Fälle $n=0$ und $p=0$ erledigen sich wieder ohne weiteres.

Diese Gleichung besagt aber, daß die Funktion

$$\varphi(z)=\sum_{\mu=0}^{\infty} P_\mu z^\mu \tag{22}$$

ein Integral der in Satz 1 eingeführten linearen Hilfsdifferentialgleichung p-ter Ordnung

$$\sum_{\lambda=0}^{p} h_\lambda(z)\frac{d^\lambda \varphi(z)}{dz^\lambda}=0 \tag{23}$$

ist. Da die Gleichung (23) genau s für $|z|\leqq 1$ reguläre Integrale haben soll, kann man die Größen $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}$ auf s unabhängige Arten so wählen, daß der Konvergenzradius der Reihe (22) größer als 1 wird, also

$$\limsup_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|P_\mu|}<1. \tag{24}$$

Dann zeigt sich aber, daß die Gleichungen (20) erfüllt sind, die daher mindestens s linear unabhängige Lösungen haben. In der Tat verbürgt die Ungleichung (24) die absolute Konvergenz der nachstehenden Doppelreihe, so daß die vorgenommene Gliederumstellung erlaubt ist, und man erhält:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=0}^{p-1}\omega_{\lambda\varkappa}P_\lambda &= \sum_{\lambda=0}^{p-1}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_{\nu\lambda}D_{\nu\varkappa}\Big)P_\lambda & \text{(nach (18))}\\ &=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(\sum_{\lambda=0}^{p-1}\gamma_{\nu\lambda}P_\lambda\Big)D_{\nu\varkappa}\\ &=-\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu}(a_{\nu-\mu}+b_{\mu,\nu-\mu})\frac{(\mu+p)!}{\mu!}P_{p+\mu}D_{\nu\varkappa} & \text{(nach (21))}\\ &=-\sum_{\mu=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu+b_{\mu\nu})D_{\mu+\nu,\varkappa}\Big)\frac{(\mu+p)!}{\mu!}P_{p+\mu}=0,\end{aligned}$$

da ja die innere Summe verschwindet. Da die Gleichungen (20) somit mindestens s linear unabhängige Lösungen haben, ist der Rang des Koeffizientensystems, also auch der Rang der Matrix (19) *höchstens* $p-s$.

Um zu zeigen, daß er auch *mindestens* $p-s$ ist, betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^{M+n}}{dz^{M+n}}\Big(\sum_{\lambda=0}^{p} h_\lambda(z)\frac{d^\lambda\varphi(z)}{dz^\lambda}\Big)=0, \tag{25}$$

wo M die seitherige Bedeutung hat (vgl. (15)). Die Gleichung (25) ist linear homogen und von der Ordnung $M+n+p$. Ihre Koeffizienten sind im Bereich $|z|\leqq 1$ regulär, und der Koeffizient der höchsten Ab-

leitung hat daselbst n Nullstellen; also hat die Gleichung mindestens $M+p$ Integrale, die für $|z| \leqq 1$ regulär sind[14]). Für diese Integrale $\varphi(z)$ wird der Ausdruck

$$\sum_{\lambda=0}^{p} h_\lambda(z) \frac{d^\lambda \varphi(z)}{dz^\lambda}$$

ein Polynom vom höchstens $(M+n-1)$-ten Grad. Durch lineare Verbindung erhält man noch mindestens p Integrale, für die das Polynom den Faktor z^M hat. Solche p Integrale seien $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_p(z)$. Dann ist also

$$(26) \qquad \sum_{\lambda=0}^{p} h_\lambda(z) \frac{d^\lambda \varphi_\varrho(z)}{dz^\lambda} = \sum_{\nu=M}^{M+n-1} B_{\nu\varrho} z^\nu \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, p),$$

wo die $B_{\nu\varrho}$ gewisse Konstanten sind. Der Rang der Matrix

$$(27) \qquad \left\| \begin{matrix} B_{M1}, & B_{M+1,1}, & \ldots, & B_{M+n-1,1} \\ B_{M2}, & B_{M+1,2}, & \ldots, & B_{M+n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{Mp}, & B_{M+1,p}, & \ldots, & B_{M+n-1,p} \end{matrix} \right\|$$

ist $\geqq p-s$; denn andernfalls könnte man durch lineare Verbindung der p Gleichungen (26) mehr als s Integrale der homogenen Gleichung (23) herleiten, während diese doch bloß s hat. Setzt man

$$(28) \qquad \varphi_\varrho(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu\varrho} z^\nu \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, p)$$

und führt das in (26) ein, so ergibt sich analog zu (21a):

$$\sum_{\mu=0}^{p+\nu} [\alpha_{\nu-\mu,0} + \alpha_{\nu-\mu+1,1}\mu + \alpha_{\nu-\mu+2,2}\mu(\mu-1) + \ldots$$
$$+ \alpha_{\nu-\mu+p,p}\mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)] P_{\mu\varrho} = B_{\nu\varrho},$$

wobei $B_{\nu\varrho}$ für $\nu < M$ und $\nu > M+n-1$ durch 0 zu ersetzen ist. Analog zu (21) kann man statt der letzten Gleichung auch schreiben:

$$(29) \qquad \sum_{\lambda=0}^{p-1} \gamma_{\nu\lambda} P_{\lambda\varrho} = -\sum_{\mu=0}^{\nu} (a_{\nu-\mu} + b_{\mu,\nu-\mu}) \frac{(\mu+p)!}{\mu!} P_{p+\mu,\varrho} + B_{\nu\varrho}.$$

Multipliziert man (29) mit $D_{\nu\varkappa}$ und summiert nach ν von 0 bis ∞,

---

[14]) Nach Satz 2 meiner Arbeit: „Über diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten", Math. Annalen 70 (1911), S. 1–32. Einen erheblichen Teil meines Beweises hat kürzlich Herr Hilb in einer gleichbetitelten Arbeit wesentlich vereinfacht, Math. Annalen 82 (1921), S. 40 und 41.

so verschwindet genau wie vorhin S. 39 rechts wieder die Doppelreihe und man erhält:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\lambda=0}^{p-1}\gamma_{\nu\lambda}P_{\lambda\varrho}\right)D_{\nu\varkappa}=\sum_{\nu=M}^{M+n-1}B_{\nu\varrho}D_{\nu\varkappa}.$$

Hier ist aber die rechte Seite wegen (15) gleich $B_{M+\varkappa-1,\varrho}$, und die linke Seite gleich $\sum_{\lambda=0}^{p-1}\omega_{\lambda\varkappa}P_{\lambda\varrho}$, wie man aus den zwei ersten Zeilen der Gleichungskette auf S. 39 ersieht. Also

$$(30)\qquad \sum_{\lambda=0}^{p-1}\omega_{\lambda\varkappa}P_{\lambda\varrho}=B_{M+\varkappa-1,\varrho}\qquad \begin{pmatrix}\varkappa=1,2,\ldots,n\\ \varrho=1,2,\ldots,p\end{pmatrix}.$$

Da der Rang der Matrix (27) $\geqq p-s$ gefunden wurde, sind die $(p-s)$-reihigen Determinanten dieser Matrix nicht alle Null. Diese Determinanten setzen sich aber wegen (30) nach bekannten Determinantensätzen linear homogen zusammen aus gewissen $(p-s)$-reihigen Determinanten der Matrix (19), die also auch nicht alle verschwinden können. Somit ist auch der Rang der Matrix (19) $\geqq p-s$. W. z. b. w.

§ 5.

Nachträgliche Befreiung von einer einschränkenden Voraussetzung.

In den beiden letzten Paragraphen sind die Sätze 1 und 2 unter der einschränkenden Annahme bewiesen, daß $\alpha_{0p}\neq 0$ ist. Um uns jetzt von dieser Einschränkung zu befreien, machen wir die Substitution

$$(31)\qquad y=e^{\sigma x}Y,$$

wodurch die Differentialgleichung (1) übergeht in die folgende:

$$(32)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{h_0^{(\nu)}(\sigma)}{\nu!}+\frac{h_1^{(\nu)}(\sigma)}{\nu!}x+\ldots+\frac{h_p^{(\nu)}(\sigma)}{\nu!}x^p\right)Y^{(\nu)}=f(x)e^{-\sigma x}.$$

Das ist eine Differentialgleichung der gleichen Bauart wie (1). An die Stelle der Funktion $f(x)$, deren Stufe $\leqq q$ sein sollte, ist die Funktion $f(x)e^{-\sigma x}$ getreten, deren Stufe dann $\leqq q+|\sigma|$ ist (vgl. S. 32 die Sätze D und F). An die Stelle von α_{0p} ist $h_p(\sigma)$, endlich an die Stelle der Funktionen

$$h_\lambda(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{\nu\lambda}z^\nu$$

sind die Funktionen

$$\psi_\lambda(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{h_\lambda^{(\nu)}(\sigma)}{\nu!}z^\nu=h_\lambda(\sigma+z)$$

getreten, die im Bereich $|z| \leqq q + |\sigma|$ regulär sind, sofern nur $|\sigma|$ klein genug gewählt ist. Auch hat dann die Funktion $\psi_p(z) = h_p(\sigma + z)$ im Bereich $|z| \leqq q + |\sigma|$ genau n Nullstellen. Nun kann man offenbar σ absolut beliebig klein und so wählen, daß $h_p(\sigma) \neq 0$ ist. Für die Differentialgleichung (32) ist dann die einschränkende Voraussetzung erfüllt, die wir in den beiden letzten Paragraphen machen mußten. Für sie gelten daher die betreffenden Existenzsätze, wobei die Stufe der Integrale Y höchstens $q + |\sigma|$ ist. Diesen Integralen Y entsprechen aber vermöge (31) Integrale y von (1), deren Stufe $\leqq q + 2|\sigma|$ ist. Da aber $|\sigma|$ beliebig klein sein darf, ist die Stufe der Integrale y sogar $\leqq q$. In der Tat kann man z. B. im Fall des Satzes 1 folgendermaßen schließen:

Es gibt genau $n - p + s$ Integrale $y_1, \ldots, y_{n-p+s}$, deren Stufe $\leqq q + 2|\sigma|$ ist. Wenn eines darunter wäre, dessen Stufe $> q$, etwa gleich $q + \tau$ ist, so würden weniger als $n - p + s$ Integrale übrigbleiben, deren Stufe $< q + \tau$ ist. In Wahrheit gibt es aber doch $n - p + s$ solche Integrale, da man ja $|\sigma|$ auch entsprechend kleiner, insbesondere $|\sigma| < \frac{\tau}{2}$ wählen kann.

(Eingegangen am 22. 3. 1921.)

Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten.

(3. Mitteilung.)

Von

Emil Hilb in Würzburg.

Die Methoden, welche in der ersten und zweiten Mitteilung entwickelt wurden, führen ohne weiteres zur expliziten Aufstellung der gesuchten ganzen transzendenten Integrale der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{d^{k-1} y}{d x^{k-1}} = f(x),$$

in der die $g_k(x)$ Polynome p-ten Grades sind, wenn die Laplacesche Transformierte der Differentialgleichung

$$(1\text{a}) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{d^{k-1} y}{d x^{k-1}} = 0$$

nur singuläre Stellen der Bestimmtheit hat. Herr Perron machte mir nun ein für diese Annalen bestimmtes Manuskript zugänglich, in welchem er Existenzsätze für (1a) ganz allgemein ableitet, während er für (1) auch noch Einschränkungen machen muß. Diese Arbeit bringt, wenn man sich nur auf die Existenzsätze beschränkt, dadurch eine Vereinfachung meiner Untersuchungen, daß sie nicht die unendlich vielen linearen Gleichungen, auf welche das Problem führt, explizite auflöst, sondern eben nur die Auflösungsmöglichkeit diskutiert. Indem ich diesen Gedanken aufnehme, komme ich zu dem Beweise des folgenden Satzes[1]):

---

[1]) Diesen Satz hat Perron gleichzeitig mit mir gefunden. Vgl. die unmittelbar vorhergehende Arbeit Perrons, die eine ganz wesentliche Erweiterung des oben erwähnten Manuskripts ist. Perron führt statt des Begriffs der Klasse den nahe verwandten der Stufe ein. In den Resultaten läßt sich „Klasse q" jedesmal durch „Stufe $\leqq q$" ersetzen. Ein Teil der Resultate findet sich auch in der während des Druckes erschienenen, am 13. 4. 21 eingereichten Arbeit von H. v. Koch, Sur les équations différentielles linéaires d'ordre infini. Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 15 (1921).

Ist

$$g(x,z)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)z^{k-1}=\sum_{\nu=1}^{p+1} h_\nu(z)x^{\nu-1} \tag{2}$$

für alle $|z|\leqq q$ *regulär und hat die adjungierte Differentialgleichung der Laplaceschen Transformierten von* (1a) n *ihrer Vielfachheit entsprechend gezählte singuläre Stellen vom absoluten Betrage kleiner* q *und* t *Integrale, die für* $|z|\leqq q$ *regulär sind, so hat* (1a) *genau* $n+t-p$ *ganze transzendente linear unabhängige Integrale der Klasse* q, *wenn wir alle Funktionen* $f(x)$, *für welche*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\left|\frac{d^k f}{dx^k}\right|}<q$$

ist, in eine Klasse zusammenfassen. Dann und nur dann, wenn $n\geqq p$, $t=0$ *ist, hat auch* (1) *für jedes* $f(x)$ *der Klasse* q *ein Integral der Klasse* q.

Von meinen früheren Mitteilungen setze ich wesentlich nur Kap. I § 1 der ersten Mitteilung voraus.

§ 1.

Spezielle Gleichungssysteme.

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_{k+i-1}=\eta_i \qquad (i=1,2,\ldots). \tag{3}$$

Die Reihe $a(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}$ stelle eine für $|z|\leqq q$ reguläre Funktion dar, a_1 sei $\neq 0$ und die Gleichung

$$a(z)=0 \tag{4}$$

besitze n dem absoluten Betrage nach geordnete, ihrer Vielfachheit entsprechend oft angeschriebene Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_n$, so daß $|z_n|<q$ sei. Wir setzen

$$\xi_k=\zeta_k q^{k-1}, \qquad \frac{\eta_i}{q^{i-1}}=y_i \tag{5}$$

und suchen Lösungssystem ζ_i der Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{q^{k+i-2}}{q^{i-1}}\zeta_{k+i-1}=y_i, \tag{6}$$

für welche $\Sigma|\zeta_i^2|$ konvergiert, wenn $\Sigma|y_i|^2$ konvergiert. Systeme ζ_i und y_i, welche dieser Konvergenzbedingung genügen, sollen erlaubte Systeme heißen. Man erhält aus ihnen ein Lösungssystem von (3), für welches

$$(7)\qquad \overline{\lim_{i\to\infty}}\sqrt[i]{|\xi_i|}\leqq q, \quad \text{wenn} \quad \overline{\lim_{i\to\infty}}\sqrt[i]{|\eta_i|}< q,$$

und zwar braucht man, wie man sofort sieht, in der ersten Ungleichung nur $<$ zu schreiben.

Nun ist die Bilinearform

$$(8)\qquad A(x,\zeta)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{q^{k+i-2}}{q^{i-1}}x_i\zeta_{k+i-1}=\sum_{k=1}^{\infty}a_kq^{k-1}\sum_{i=1}^{\infty}x_i\zeta_{k+i-1}$$

absolut beschränkt, da

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}|x_i\zeta_{k+i-1}|\leqq\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|^2}.$$

Wir setzen nun in (6) die $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n$ enthaltenden Glieder auf die rechte Seite und zeigen, daß das so erhaltene Gleichungssystem für $\zeta_{n+1},\zeta_{n+2},\ldots$ eine und nur eine „erlaubte" Lösung hat, was nach I § 1 bewiesen ist, wenn gezeigt ist, daß die beschränkte Bilinearform

$$(10)\qquad A_n(x,\zeta)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=n-i+2}^{\infty}a_k\frac{q^{k+i-2}}{q^{i-1}}x_i\zeta_{k+i-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty}a_{l-k+1}\frac{q^{l-1}}{q^{k-1}}x_k\zeta_l,$$

in der $a_k=0$ für $k<1$ zu setzen ist, eine beschränkte vordere Reziproke

$$(11)\qquad \Phi(x,\zeta)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_{ik}q^{k-1}}{q^{i-1}}x_i\zeta_k$$

besitzt, so daß

$$(12)\qquad \Phi(x,\zeta)A_n(\zeta,y)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty}\varphi_{ik}a_{l-k+1}\frac{q^{l-1}}{q^{i-1}}x_iy_k=\sum_{i=n+1}^{\infty}x_iy_i,$$

d. h.

$$(13)\qquad \sum_{k=1}^{l}\varphi_{ik}a_{l-k+1}=\delta_{il}\;\begin{pmatrix}i=n+1,n+2,\ldots,\\ l=n+1,n+2,\ldots,\end{pmatrix}\;\delta_{ii}=1,\;\delta_{il}=0,\;\text{wenn } i\neq l\Big)$$

ist. Es ist also, wenn

$$(14)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{ik}z^{k-1}=\varphi_i(z),$$

$$(15)\qquad \varphi_i(z)\,a(z)=E_{n-1,i}(z)+z^{i-1},$$

wo $E_{n-1,i}(z)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades ist, dessen Koeffizienten wir so bestimmen müssen, daß die Reihe für $\varphi_i(z)$ konvergiert, wenn $|z|\leqq q$ ist. Man erhält daher für die n Koeffizienten von $E_{n-1,i}(z)$ n lineare inhomogene Gleichungen, deren Determinante aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten als von Null verschieden bekannt ist. Es folgt daraus $E_{n-1,i}(z)=O|q^i|$ für $|z|\leqq q$. (Vgl. wegen der Bezeichnung I, S. 11 (59)). Nun ist (I, S. 15)

$$(16)\qquad \int_0^{2\pi} |\varphi_i(q e^{\sqrt{-1}\vartheta})|^2 d\vartheta = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{ik}|^2 q^{2(k-1)} = O(q^i),$$

so daß nach der Schwarzschen Ungleichung $\Phi(x,\zeta)$ beschränkt ist. Es gibt also eine und nur eine beschränkte vordere und damit auch nur eine beschränkte hintere Reziproke. (Die bisherigen Ausführungen geben die Theorie der linearen Differentialgleichungen ∞ hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten und waren mir bei Ausarbeitung von I natürlich bekannt.)

Wir betrachten nun das allgemeinere Gleichungssystem

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_{ik}) \frac{q^{k+i-2}}{q^{i-1}} \zeta_{k+i-1} = y_i \\ \text{oder} \\ \displaystyle\sum_{k=i}^{\infty}(a_{k-i+1} + b_{i,k-i+1}) \frac{q^{k-1}}{q^{i-1}} \zeta_k = y_i, \end{array}\right.$$

wobei wir annehmen, daß b_{ik} für $k < 1$, aber auch b_{i1} selbst Null sei. Ferner soll die Bilinearform

$$(18)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} q^{k-1} x_i \zeta_{k+i-1} = B(x,\zeta)$$

vollstetig in Bezug auf die x sein, d. h. es soll $|B(x,\zeta)| < \varepsilon$ dadurch gemacht werden können, wenn ε beliebig vorgegeben ist, daß man endlich viele x_i Null setzt, wenn nur

$$(19)\qquad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \leqq 1, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i|^2 \leqq 1.$$

Wir setzen dann $x_1 = x_2 = \ldots = x_\mu = 0$, so daß, wenn (19) erfüllt ist, $|B(x,\zeta)| < \varepsilon$ wird, d. h. wir lassen die μ ersten Gleichungen (17) weg. In den übrigbleibenden Gleichungen, die $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\mu$ nicht mehr enthalten, setzen wir die $\zeta_{\mu+1}, \zeta_{\mu+2}, \ldots, \zeta_{\mu+n}$ enthaltenden Glieder auf die andere Seite. Die so aus A und B entstehenden Bilinearformen nennen wir $A_{\mu+n}$ und $B_{\mu+n}$. Es gibt dann eine und nur eine Reziproke A, daß

$$(20)\qquad \mathsf{A} A_{\mu+n} = A_{\mu+n} \mathsf{A} = \sum_{i=\mu+1}^{\infty} x_i \zeta_{i+n} = E$$

wird. Ist $|\mathsf{A}|$ bei (19) $< M$, so wählen wir μ, von dem M ja unabhängig ist, so groß, daß $\varepsilon M < 1$, wenn (19) erfüllt ist. Dann hat auch $A_{\mu+n} + B_{\mu+n}$ eine beschränkte vordere und hintere Reziproke, also überhaupt nur eine Reziproke. In der Tat setzen wir

$$(21)\qquad \Gamma \mathsf{A}(A_{\mu+n} + B_{\mu+n}) = E,$$

so ist

(22) $$\Gamma(E + \mathsf{A}B_{\mu+n}) = E$$

und die Reihe

(23) $$\Gamma = E - \mathsf{A}B_{\mu+n} + \mathsf{A}B_{\mu+n}\mathsf{A}B_{\mu+n} - \ldots$$

konvergiert und genügt (22), so daß $\Gamma\mathsf{A}$ eine beschränkte vordere Reziproke ist. Ebenso erhält man eine beschränkte hintere Reziproke $\mathsf{A}\Gamma_1$, die damit identisch ist, womit gezeigt ist, daß die Gleichungen (17) nach Abtrennung der μ ersten Gleichungen bei gegebenen $\zeta_{\mu+1}, \ldots, \zeta_{\mu+n}$ ein und nur ein erlaubtes Gleichungssystem besitzen. Da $a_1 \neq 0$ war, $b_{i1} = 0$, so kann man aus den abgetrennten Gleichungen $\zeta_\mu, \zeta_{\mu-1}, \ldots, \zeta_1$ sukzessive eindeutig berechnen, so daß also nach Abtrennung der $\zeta_{\mu+1}, \zeta_{\mu+2}, \ldots, \zeta_{\mu+n}$ enthaltenden Glieder die (17) entsprechende Bilinearform eine und nur eine vordere, also auch nur eine hintere Reziproke hat. Also hat das Gleichungssystem, das aus (17) durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen entsteht, nach Abtrennung von n geeigneten Gleichungen eine und nur eine erlaubte Lösung. Indem man zu den Größen ξ_i und η_i übergeht, erhält man daher die Sätze:

Satz 1. *Hat* (4) *n von Null verschiedene Wurzeln vom absoluten Betrag* $< q$, *ist ferner die Bilinearform* (18) *vollstetig in Bezug auf die* x, $a_1 \neq 0$, $b_{i1} = 0$, $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\eta_i|} < q$, *so hat das Gleichungssystem*

(24) $$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_{ik})\, \xi_{k+i-1} = \eta_i$$

nach Festlegung von n geeignet herausgegriffenen Größen ξ_i eine und nur eine Lösung, für welche $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\xi_i|} < q$ *ist*[1]).

Satz 2. *Unter denselben Voraussetzungen über die a_k und b_{ik} kann man bei beliebigen ξ_i, für welche* $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\xi_i|} < q$, *die linken Seiten der Gleichungen* (24) *auf eine und nur eine Weise mit Größen x_i, für welche* $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|x_i|} < \frac{1}{q}$ *so multiplizieren, daß nach Addition aller linken Seiten die Koeffizienten der Größen ξ_k, mit Ausnahme von n geeignet herausgegriffenen, vorgegebene Werte η_k haben, sofern* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\eta_k|} < \frac{1}{q}$ *ist.*

---

[1]) Vgl. hierzu Perron, Über Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen. Math. Ann. 84, S. 1. Zunächst folgt nur $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\xi_i|} \leq q$, da man aber in der ganzen Ableitung q durch eine kleinere Größe ersetzen kann, so ist = auszuschließen.

§ 2.

Anwendung auf lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung.

Indem man in (1) allenfalls y durch $ye^{\alpha x}$ ersetzt, wo α eine geeignete Konstante ist, kann man stets erreichen[2]), daß $g_1(x)$ genau vom Grade p ist, ohne daß die folgenden Sätze durch Rückgängigmachung der Substitution geändert werden. Wir nehmen also an, daß $g_1(x)$ vom Grade p sei. $f(x)$ sei von der Klasse q. Setzt man dann das Integral von (1) in der Form

$$(25)\quad y=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{d^{\nu-1}y(x_0)}{dx^{\nu-1}}\frac{1}{(\nu-1)!}(x-x_0)^{\nu-1}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\xi_\nu}{(\nu-1)!}(x-x_0)^{\nu-1}$$

an, so erhält man für die ξ_ν das Gleichungssystem

$$(26)\quad\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{p}\binom{j-1}{\mu}g^{(\mu)}_{k+\mu-j+1}(x_0)\,\xi_k=f^{(j-1)}(x_0)\\ \text{oder}\\ \displaystyle\sum_{k=-p+1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{p}\binom{j-1}{\mu}g^{(\mu)}_{k+\mu}(x_0)\,\xi_{k+j-1}=f^{(j-1)}(x_0).\end{array}\right.$$

Dabei sind alle g_k für $k<1$ Null. Ist y von der Klasse q, so ist $\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|\xi_k|}<q$ und umgekehrt. Wir lassen nun die p ersten Gleichungen weg und dividieren für $j>p$ die j-te Gleichung durch $\binom{j-1}{p}$ und setzen

$$(27)\quad g^{(p)}_{k+p}(x)=a_{k+p},\quad \sum_{\mu=0}^{p-1}\frac{\binom{j-1}{\mu}}{\binom{j-1}{p}}g^{(\mu)}_{k+\mu}(x_0)=b_{i,k+p},\quad \frac{f^{(j-1)}(x_0)}{\binom{j-1}{p}}=\eta_i,\ j=i+p,$$

dann gehen die Gleichungen (26) nach Weglassung der ersten p über in

$$(28)\quad \sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_{ik})\,\xi_{k+i-1}=\eta_i,\qquad (i=1,2,\ldots).$$

Es ist also $a_1\neq 0$, $b_{i1}=0$ und da für $\mu\leqq p-1$, $j>2p$, $\frac{\binom{j-1}{\mu}}{\binom{j-1}{p}}\leqq\frac{\binom{j-1}{p-1}}{\binom{j-1}{p}}=\frac{p}{(j-p)}$, so folgt, daß die entsprechende Bilinearform $B(x,\zeta)$ in (18) vollstetig ist.

Wir dürfen also die Sätze des § 1 unmittelbar anwenden. Wegen (4) und (27) ist

$$(29)\qquad a(z)=p!\,h_{p+1}(z).$$

---

[2]) Diesen Gedanken fand ich schon in Perrons Manuskript.

Hat also $a(z) = 0$ n der Vielfachheit entsprechend gezählte Wurzeln vom absoluten Betrag $< q$, so kann man in (26) nach Weglassen der p ersten Gleichungen n Größen ξ_k mit geeignet gewählten Indizes beliebig vorgeben; dann gibt es ein und nur ein Lösungssystem ξ_k, für welches

$$(30) \qquad \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\xi_k|} < q$$

ist. Nimmt man die p ersten Gleichungen hinzu, so erhält man ein lineares Gleichungssystem Γ von p Gleichungen für die noch unbestimmten n Größen ξ. Diese p Gleichungen sind inhomogen, wenn $f(x) \neq 0$, haben also dann und nur dann für jedes $f(x)$ der Klasse q eine Lösung, wenn $n \geqq p$ und der Rang R der Koeffizientenmatrix von Γ gerade p ist. In diesem und nur in diesem Falle besitzt (1) ein Integral der Klasse q für jedes $f(x)$ der Klasse q. Ist $f(x) \equiv 0$, so ist Γ homogen und (1a) besitzt entsprechend den mindestens $n - p$ und höchstens n Lösungssystemen des jetzt homogenen Gleichungssytems Γ mindestens $n - p$, höchstens n Integrale der Klasse q.

Um R näher zu bestimmen, multiplizieren wir die j-te Gleichung (26) mit φ_j. Durch Addition der p ersten Gleichungen erhält man einen Ausdruck $\sum_{k=1}^{\infty} v_k \xi_k$, worin $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|v_k|} < q^{-1}$, da $\sum_{k=1}^{\infty} g_k z^{k-1}$ für $|z| = q$ regulär ist.

Nun kann man nach Satz 2 für alle ξ_k, für welche $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\xi_k|} < q$, die Gleichungen (26) nach Streichung der p ersten so mit Größen φ_i, für welche $\overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\varphi_i|} < \frac{1}{q}$ ist, multiplizieren, daß man nach Addition der linken Seiten eine Linearform $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k$ erhält, in der die η_k mit Ausnahme von n geeignet gewählten beliebig vorgebbar sind, sofern $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\eta_k|} < q^{-1}$ ist. Die nicht vorgebbaren n Größen η folgen als lineare und homogene Funktionen der φ, also auch der anderen η. Wir suchen nun die Größen φ_{jk} so zu bestimmen, daß man nach Addition aller entsprechend multiplizierten linken Seiten von (26) einen Ausdruck

$$E_{k1}\xi_1 + E_{k2}\xi_2 + \ldots + E_{k,n-p}\xi_{n-p} + E_{k,n-p+k}\xi_{n-p+k}$$

erhält, in welchem $E_{k1}, E_{k2}, \ldots$ zunächst unbestimmt sind. Hält man diese Größen, sowie $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \ldots, \varphi_{kp}$ fest, so kann man nach Satz 2 die anderen Größen φ_{kj} homogen und linear durch diese Größen ausdrücken, wenn man von den die Größen $\varphi_{kp+1}, \varphi_{kp+2}, \ldots$ bestimmenden Gleichungen n geeignete wegläßt. Diese n weggelassenen Gleichungen geben dann ein System Γ_1 von n inhomogenen Gleichungen für die noch un-

bestimmten $n+1$ Größen, haben also sicher eine Lösung, bei der nicht alle diese Größen verschwinden. Setzt man aber

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{kj} z^{j-1} = \varphi_k(z), \tag{31}$$

so genügt $\varphi_k(z)$ wegen (2) der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} L(\varphi_k(z)) &\equiv \sum_{\mu=0}^{p} \frac{1}{\mu!} \frac{d^\mu g(x_0, z)}{dx_0^\mu} \frac{d^\mu \varphi_k(z)}{dz^\mu} \\ &= E_{k1} + \ldots + E_{k,n-p} z^{n-p-1} + E_{k,n-p+k} z^{n-p+k-1} \end{aligned} \tag{32}$$

und es hat diese Differentialgleichung ein für $|z| \leqq q$ reguläres Integral. Wir setzen nun $k=1$ und zeigen, daß wir $E_{1,n-p+1}=1$ setzen dürfen, wenn nicht die homogene Differentialgleichung

$$L(\varphi(z)) = 0 \tag{33}$$

ein für $|z| \leqq q$ reguläres Integral hat.

Es ist nun

$$L(\varphi(z)) \equiv e^{-x_0 z} \sum_{\nu=1}^{p+1} h_\nu(z) \frac{d^{\nu-1}(e^{x_0 z}\varphi(z))}{dz^{\nu-1}}$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{p+1} h_\nu(z) \frac{d^{\nu-1}\varphi(z)}{dz^{\nu-1}} = 0$$

die Adjungierte der Laplaceschen Transformierten von (1a).

Wir nehmen also an, daß (33) *kein für $z \leqq q$ reguläres Integral hat.* Sei dann $E_{1,s+1}$ das letzte der Folge $E_{11}, E_{12}, \ldots$, das nicht identisch in x_0 verschwindet, also für geeignetes x_0 sicher von Null verschieden ist, so daß wir (32) für $k=1$ durch $E_{1,s+1}$ dividieren dürfen. Es gibt dann ein für $|z| \leqq q$ reguläres Integral $\varphi_0(z)$ der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} L(\varphi_0(z)) &= \frac{E_{11}}{E_{1,s+1}} + \frac{E_{12} z}{E_{1,s+1}} + \ldots + \frac{E_{1,s}}{E_{1,s+1}} z^{s-1} + z^s \\ &= F_{01} + F_{02} z + \ldots + F_{0,s} z^{s-1} + z^s \qquad (s \leqq n-p). \end{aligned} \tag{34}$$

Nun ist (vgl. II, (55))

$$L\left(\frac{d\varphi(z)}{dz} + z\varphi(z)\right) \equiv \frac{d}{dz}\left(L(\varphi(z))\right) + z L(\varphi(z)). \tag{35}$$

Es genügt also $\frac{d\varphi(z)}{dz} + z\varphi(z) - F_{0,s}\varphi(z) = \varphi_1(z)$ einer Differentialgleichung der Form

$$L(\varphi_1(z)) = F_{11} + F_{12} z + \ldots + F_{1s} z^{s-1} + z^{s+1} \tag{36}$$

und ist für $|z| \leqq q$ regulär. Durch Fortsetzung dieses Prozesses erhält man allgemein für $|z| \leqq q$ reguläre Funktionen φ_l, die Differentialgleichungen

$$(37)\qquad L(\varphi_l(z)) = F_{l1} + F_{l2} z + \ldots + F_{ls} z^{s-1} + z^{s+l} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügen. Für die Koeffizienten φ_{lj} der Potenzreihen $\varphi_l(z)$ ist $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|\varphi_{lj}|} < \frac{1}{q}$; man darf daher die mit φ_{lj} multiplizierten Gleichungen (26) addieren und umordnen, wenn die ξ_k ein erlaubtes Lösungssystem der Gleichungen (26) für $f(x) \equiv 0$ sind. Es ergeben sich dann die Gleichungen

$$(38)\qquad F_{l1}\xi_1 + F_{l2}\xi_2 + \ldots + F_{ls}\xi_s + \xi_{s+l+1} = 0,$$

so daß es also höchstens s linear unabhängige Lösungen des jetzt homogenen Gleichungssystems Γ gibt, wo $s \leqq n - p$. Es gibt also höchstens $n - p$ Integrale der Klasse q von (1a), und da es, wie wir gesehen haben, mindestens so viele gibt, gibt es genau $n - p$ Integrale. Der Rang der Koeffizientenmatrix von Γ ist also p, die inhomogenen Gleichungen haben eine Lösung, wenn $n \geqq p$, und (1) hat für jedes $f(x)$ der Klasse q ein Integral der Klasse q, (1a) $n - p$ Integrale.

Wir nehmen jetzt an, (33) besitze genau t linear unabhängige, für $|z| \leqq q$ reguläre Integrale, die wir so normiert denken, daß ihre Potenzreihen in bezug auf z mit der $r_1 - 1$-ten, $r_2 - 1$-ten, $\ldots$, $r_t - 1$-ten Potenz beginnen. Die r seien der Größe nach geordnet, alle sind kleiner als p. Es gibt also t Systeme φ_j, daß die Summen der mit diesen Größen multiplizierten linken Seiten von (26) identisch in den ξ Null werden. Es ist also für $f(x) \equiv 0$ die r_1-te Gleichung eine Folge der übrigen, ebenso die r_2-te usf. Zunächst kann also jetzt (1) für beliebiges $f(x)$ der Klasse q kein Integral der Klasse q haben, *womit der auf* (1) *bezügliche Teil des Satzes der Einleitung vollständig bewiesen ist.* Wir setzen jetzt $f(x) \equiv 0$, dann kann man in (26) die r_1-te, r_2-te, $\ldots$, r_t-te Gleichung weglassen und Γ besteht jetzt aus höchstens $p - t$ linear unabhängigen homogenen Gleichungen für die n noch unbestimmten Größen ξ. Es gibt also mindestens $n - p + t$ Integrale von (1a) der Klasse q, wobei wir $n - p + t > 0$ annehmen. Wir zeigen, daß es genau so viele gibt und gehen so vor, wie bei $t = 0$. Wir streichen in (26) für $f(x) \equiv 0$ die r_1-te, r_2-te, $\ldots$, r_t-te Gleichung und bestimmen die Größen φ_j so, daß die Summe der übrigbleibenden linken Seiten

$$G_{k1}\xi_1 + G_{k2}\xi_2 + \ldots + G_{k,n-p+t}\xi_{n-p+t} + G_{k,n-p+t+k}\xi_{n-p+t+k}$$

wird. Man erhält nämlich für $p - t + n - p + t + 1$ unbestimmte Größen ein Gleichungssystem Γ_2 von n homogenen Gleichungen, die immer eine Lösung haben. $\varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}, \ldots, \varphi_{r_t}$, die überhaupt nicht vorkamen, setzen

wir Null. Die Funktion $\varphi(z)$, die diese φ als Koeffizienten hat, genügt, wenn $k = 1$ ist, der Differentialgleichung

(39) $L(\varphi(z)) = G_{1,1} + \ldots + G_{1,n-p+t} z^{n-p+t-1} + G_{1,n-p+t+1} z^{n-p+t}$;

sie ist für $|z| \leqq q$ regulär und genügt der Bedingung (α), daß ihre r_1-te, r_2-te, ..., r_t-te Ableitung für $z = 0$ verschwindet. (33) hat kein solches Integral, so daß eine Größe G von Null verschieden sein muß. $G_{1,s+1}$ sei das letzte der Folge, das nicht verschwindet. Es gibt also eine Funktion φ_0, die für $|z| \leqq q$ regulär ist und den Bedingungen (α) sowie einer Differentialgleichung der Form

(40) $L(\varphi_0(z)) = H_{01} + H_{02} z + \ldots + H_{0s} z^{s-1} + z^s \qquad (s \leqq n - p + t)$

genügt. Daraus leiten wir wie oben, indem wir nur die mit geeigneten Konstanten multiplizierten Integrale von (33), die für $|z| \leqq q$ regulär sind, so hinzusetzen, daß (α) erfüllt bleibt, die Gleichungen

(41) $L(\varphi_k(z)) = H_{k1} + H_{k2} z + \ldots + H_{ks} z^{s-1} + z^{s+k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

ab, die alle die Bedingungen (α) erfüllende, für $|z| \leqq q$ reguläre Integrale haben. Entsprechend (38) erhält man

(42) $H_{k1}\xi_1 + H_{k2}\xi_2 + H_{ks}\xi_s + \xi_{s+k+1} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$,

woraus aber folgt, daß (1a) höchstens s linear unabhängige Integrale der Klasse q hat. Da es aber mindestens $n - p + t$ solche Integrale gibt, $s \leqq n - p + t$ ist, ist s genau gleich $n - p + t$ und (1a) hat genau $n - p + t$ Integrale der Klasse q.

(Eingegangen am 19. 4. 21.)

Zahlentheoretische Abschätzungen.

Von

J. G. van der Corput in Utrecht.

Einleitung.

In dieser Arbeit wird eine neue zahlentheoretische Abschätzungsmethode entwickelt. Sie stützt sich auf die aus der Eulerschen Summenformel abgeleitete Ungleichung

$$(1) \qquad \left| \sum_{\alpha \leqq n \leqq \beta} e^{2\pi i F(n)} - \int_\alpha^\beta e^{2\pi i F(u)} du \right| < \frac{9}{4},$$

wo $\alpha < \beta$, $F(u)$ im Intervalle $\alpha \leqq u \leqq \beta$ definiert, reell und differentiierbar[1]), $F'(u)$ monoton[2]) und $|F'(u)| \leqq \frac{1}{2}$ vorausgesetzt ist. Unter diesen Voraussetzungen kann also die in (1) vorkommende Summe approximativ durch das entsprechende Integral ersetzt werden.

Als erste Anwendung wird eine Funktionalungleichung abgeleitet für die Funktion

$$(2) \qquad g(a, b) = \sqrt{a} \sum_{\frac{\alpha - b}{a} \leqq n \leqq \frac{\beta - b}{a}} e^{\pi i (a^2 n^2 + 4abn + 2b^2 - \frac{1}{4})},$$

wo $a > 0$, b reell und $\alpha < \beta$ ist. Diese Ungleichung, welche bei hinreichend großem $\beta - \alpha$ für sehr großes oder sehr kleines a ein sehr scharfes Resultat gibt, lautet

$$(3) \qquad \left| g(a, b) - \bar{g}\left(\frac{1}{a}, -b\right) \right| < \frac{17}{4}(\beta - \alpha) \operatorname{Min}(a^{\frac{3}{2}}, a^{-\frac{3}{2}}) + 6(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}),$$

wenn $\bar{g}$ die konjugiert komplexe Funktion von g bezeichnet. Mittels dieser Ungleichung ergibt sich eine neue Berechnung der Gaußschen Summen $\sum_{n=1}^{q} e^{2\pi i \frac{n^2}{q}}$ (q ganz, > 0).

---

[1]) In den Endpunkten eventuell nur einseitig.

[2]) D. h. falls $\alpha \leqq u_1 < u_2 \leqq \beta$ ist, ist $F'(u_2)$ stets $\geqq$ oder stets $\leqq F'(u_1)$.

Ferner wird aus (1) eine obere Schranke abgeleitet für $\left|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i f(n)}\right|$ unter folgender Voraussetzung:

A. Es sei $\alpha-\frac{1}{2}$ und $\beta-\frac{1}{2}$ ganz, $\alpha<\beta$, $f(u)$ im Intervall $\alpha \leqq u \leqq \beta$ reell, differentiierbar[1]), $f'(u)$ beständig wachsend oder beständig abnehmend. Es sei für $\alpha \leqq u_1 < u_2 \leqq \beta$

(4) $\dfrac{f'(u_2)-f'(u_1)}{u_2-u_1}$ stets $\geqq \varrho$, bzw. stets $\leqq -\varrho$,

wo ϱ eine von u_1 und u_2 unabhängige positive Konstante $\leqq 1$ bezeichnet[2]).

Aus dieser Voraussetzung wird abgeleitet

$$\left|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i f(n)}\right| < 4\,\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|+1}{\sqrt{\varrho}} \tag{5}$$

und aus der ferneren Voraussetzung $0<f'(\alpha)<f'(\beta)$

$$\left|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i f(n)}\right| < \frac{19}{2}\cdot\frac{f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}}+\frac{1}{f'(\alpha)}. \tag{6}$$

Es sei hier ein für allemal bemerkt, daß wir keinen großen Wert darauf legen die in unseren Ungleichungen vorkommenden numerischen Faktoren zu verkleinern, daß es uns vielmehr in erster Linie auf die Größenordnung in ϱ ankommt, da die Abschätzungen namentlich in den Fällen von Bedeutung sind, wo ϱ klein ist. Nach (4) würde die triviale Abschätzung in (5) bzw. (6)

(7) $\beta-\alpha$ sein, was $\leqq \dfrac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\varrho}$, bzw. $\leqq \dfrac{f'(\beta)}{\varrho}$

ist.

Es ist klar, daß man unter gewissen Bedingungen aus (5) und (6) eine obere Schranke ableiten kann für

$$\left|\sum_{\alpha<n<\beta} \psi(f(n))\right|, \tag{8}$$

wenn $\psi(v)$ in eine Fouriersche Reihe

$$\psi(v)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_m e^{2m\pi i v} \qquad \text{mit } a_0=0 \tag{9}$$

entwickelbar ist, indem man in (8) $\psi(f(n))$ in eine Fouriersche Reihe entwickelt und dann (5) bzw. (6) mit $|m|f(u)$ statt $f(u)$ anwendet auf jedes Glied dieser Entwicklung, worin $|m|\varrho \leqq 1$ ist.

[2]) (4) ist z. B. erfüllt, wenn $f''(u)$ vorhanden und beständig $\geqq \varrho$, bzw. beständig $\leqq -\varrho$ ist; denn dann ist

$$f'(u_2)-f'(u_1)=(u_2-u_1)f''(\xi) \geqq \varrho(u_2-u_1), \text{ bzw. } \leqq -\varrho(u_2-u_1) \quad (u_1<\xi<u_2).$$

Dies ist sehr einfach, wenn $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |a_m| \sqrt{|m|}$ konvergiert; unter Voraussetzung A finden wir z. B.

$$(10) \qquad \Big|\sum_{\alpha<n<\beta}\Big(f(n)-[f(n)]-\frac{1}{2}\Big)^2-\frac{\beta-\alpha}{12}\Big| < \frac{\frac{3}{2}\,|f'(\beta)-f'(\alpha)|+1}{\sqrt{\varrho}}$$

und wenn außerdem $0 < f'(\alpha) < f'(\beta)$ ist,

$$(11) \qquad \Big|\sum_{\alpha<n<\beta}\Big(f(n)-[f(n)]-\frac{1}{2}\Big)^2-\frac{\beta-\alpha}{12}\Big| < \frac{7}{2}\cdot\frac{f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{f'(\alpha)};$$

wie man sofort übersieht, sind die linken Seiten von (10) und (11) höchstens $\frac{1}{6}(\beta-\alpha)$, so daß nach (7) die triviale Abschätzung $\frac{1}{6}\cdot\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\varrho}$ bzw. $\frac{1}{6}\cdot\frac{f'(\beta)}{\varrho}$ ist.

Unter gewissen zusätzlichen Einschränkungen leiten wir aus Voraussetzung A eine obere Schranke von (8) ab, wobei in (9) nicht die Konvergenz von $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |a_m| \sqrt{|m|}$, sondern nur von $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|a_m|}{\sqrt{|m|}}$ vorausgesetzt wird (das Glied mit $m=0$ kommt wegen $a_0 = 0$ nicht in Betracht), z. B.

$$(12) \qquad \Big|\sum_{\alpha<n<\beta}\Big(f(n)-[f(n)]-\frac{1}{2}\Big)\Big| < 5\cdot\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}}+\frac{6}{\sqrt{\varrho}}$$

und unter der weiteren Voraussetzung $0 < f'(\alpha) < f'(\beta)$

$$(13) \qquad \Big|\sum_{\alpha<n<\beta}\Big(f(n)-[f(n)]-\frac{1}{2}\Big)\Big| < 9\,\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}}+\frac{1}{f'(\alpha)};$$

die triviale Abschätzung würde $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$, nach (7) also $\frac{1}{2}\cdot\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\varrho}$ bzw. $\frac{1}{2}\cdot\frac{f'(\beta)}{\varrho}$ sein.

Wir finden eine Verallgemeinerung der Abschätzungen (12) und (13), indem wir eine reelle Funktion $\psi(v)$ betrachten, welche folgender Voraussetzung genügt:

B. Es habe die reelle Funktion $\psi(v)$ die Periode 1; es sei $\psi(v)$ absolut $\leqq 1$, im Intervall $0 < v < 1$ monoton und es sei

$$\int_0^1 \psi(v)\,dv = 0.$$

Aus den Voraussetzungen A und B folgt nämlich

$$(14) \qquad \Big|\sum_{\alpha<n<\beta}\psi(f(n))\Big| < 31\,\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}}+\frac{45}{\sqrt{\varrho}},$$

und wenn außerdem $0 < f'(\alpha) < f'(\beta)$ ist,

$$(15)\qquad \Big|\sum_{\alpha<n<\beta}\psi(f(n))\Big| < 53\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{9}{2}\frac{1}{f'(\alpha)};$$

in den trivialen Abschätzungen würde man rechts $\beta-\alpha$, nach (7) also $\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\varrho}$ und $\frac{f'(\beta)}{\varrho}$ finden. Wenn man den Wert der gleichgültigen numerischen Faktoren außer Betracht läßt, folgen (12) und (13) unmittelbar aus den letzten zwei Ungleichungen, falls darin z. B. $\psi(v) = 2(v-[v]-\frac{1}{2})$ gesetzt wird.

Die vier letzten Abschätzungen sind bekannt, aber (1), (3), (5), (6), (10) und (11) nicht; (12) und (13) sind äquivalent mit dem Hauptsatz meiner Dissertation[4]), der dort sowohl mittels der Voronoïschen als mittels der Pfeifferschen Methode bewiesen ist; (14) und (15) sind äquivalent mit dem Endergebnis meiner Arbeit über die Piltzsche Abschätzungsmethode[5]). Die gegenwärtige Methode gibt nicht nur alle bis jetzt mit jenen drei andern Methoden gefundenen Abschätzungen, sondern sie ist allgemeiner und bisweilen schärfer. Z. B. geben die Voronoïsche und die Pfeiffersche Methode in ihrer jetzigen Form keine Abschätzung für die in (5), (6), (10) und (11) erwähnten Summen, und die Piltzsche Methode hat zwar diese Summen abgeschätzt, aber (abgesehen von den numerischen Faktoren) nur als Spezialfall von (14) und (15), also weniger scharf als die in dieser Note entwickelte Methode. Im Gegensatz zu jenen drei anderen ist unsere neue Methode nicht nur anwendbar, um die Anzahl der Gitterpunkte[6]) mit Gewicht 1 in gewissen ebenen Bereichen approximativ zu berechnen, sondern man kann mittels derselben auch die Anzahl der Gitterpunkte bei komplexen Gewichten abschätzen, d. h. falls jeder Gitterpunkt mit Koordinaten u, v in Anschlag gebracht wird mit dem „Gewicht" $e^{2\pi i(\lambda u+\mu v)}$, wo λ und μ beliebige feste reelle Zahlen sind. Bis jetzt war

---

[4]) J. G. van der Corput, *Over roosterpunten in het platte vlak* (*De beteekenis van de methoden van Voronoï en Pfeiffer*), 128 S. (Noordhoff, Groningen), 1919. Der Beweis des in dieser Dissertation abgeleiteten Hauptsatzes mittels der Voronoïschen Methode ist auch veröffentlicht in meiner Abhandlung: *Über Gitterpunkte in der Ebene* [Mathematische Annalen 81 (1920), S. 1–20]. Einen vereinfachten Beweis, sowohl mittels der Pfeifferschen als auch mittels der Voronoïschen Methode findet der Leser in der Arbeit:

E. Landau und J. G. van der Corput, *Über Gitterpunkte in ebenen Bereichen* [Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1920, S. 135–171].

[5]) J. G. van der Corput, *Zahlentheoretische Abschätzungen mit der Piltzschen Methode* [Mathematische Zeitschrift 10 (1921), S. 105–120].

[6]) Gitterpunkte sind Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.

es nur in speziellen Fällen gelungen, Gitterpunktanzahlen bei komplexen Gewichten abzuschätzen; und zwar durch Herrn Landau [7]) mit einer komplexanalytischen Methode bei denjenigen n-dimensionalen Bereichen, für welche u. a. die dem Problem zugehörige Dirichletsche Reihe einer Funktionalgleichung vom Typus der Riemannschen bei der Zetafunktion genügt. Die gegenwärtige Methode setzt uns in den Stand, die Anzahl der Gitterpunkte mit komplexen Gewichten abzuschätzen (und zwar mit derselben Größenordnung des Fehlers) in fast allen den ebenen Bereichen, bei denen jetzt schon die Anzahl der Gitterpunkte mit Gewicht 1 approximativ bekannt ist; denn Satz 6 dieser Abhandlung ist die Verallgemeinerung des Hauptsatzes meiner Dissertation für komplexe Gewichte statt Gewicht 1, und auf dieselbe Art, wie ich in meiner Dissertation aus diesem Hauptsatze fast alle bis jetzt bekannten Abschätzungen für Gitterpunkte mit Gewicht 1 in ebenen Bereichen abgeleitet habe, kann man mit Satz 6 die entsprechenden Ergebnisse für Gitterpunkte mit komplexen Gewichten finden. Da dies keine Schwierigkeiten bietet, betrachte ich nur ein einziges Beispiel: Es seien λ, μ, f, h, p und q reelle Zahlen mit den Eigenschaften λ und μ nicht ganz, $f > 0$, $h > 0$, $h > fq - hp > -f$. Elementar ergibt sich dann, daß die das Produkt

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{m^{fs-p}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \mu n}}{n^{hs-q}}$$

darstellende Dirichletsche Reihe konvergiert für $\Re(s) > \frac{1+p+q}{f+h}$, aber mit Satz 6 wird die Konvergenz schon bewiesen, falls

$$\Re(s) > \operatorname{Max}\left(\frac{1+p+2q}{f+2h}, \quad \frac{1+2p+q}{2f+h}\right)$$

ist. Von diesem Satze war bis jetzt nur der Spezialfall $f-1 = h-1 = p = q = 0$ von Herrn Landau [8]), der Spezialfall λ und μ rational von mir [9]) bekannt.

Schließlich möchte ich noch bemerken, daß die überaus lehrreichen Besprechungen von Gitterpunktproblemen mit Herrn Professor E. Landau, zu denen ich während meines Aufenthalts in Göttingen Gelegenheit hatte, mir bei der Abfassung dieser Abhandlung eine wesentliche Anregung waren.

---

[7]) Vgl. insbesondere E. Landau, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen* (*Zweite Abhandlung*) [Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1915, S. 209–243].

[8]) Vgl. § 5 der in Anm. [7]) genannten Abhandlung.

[9]) Dissertation (Vgl. Fußnote 4), S. 12 und 114–116 (§ 131).

Hauptteil.

Satz 1. *Falls $\alpha < \beta$, $F(u)$ im Intervall $\alpha \leqq u \leqq \beta$ reell und differentiierbar*[1]), *$F'(u)$ monoton und $|F'(u)| \leqq \frac{1}{2}$ ist, ist*

$$(16)\qquad \left|\sum_{\alpha \leqq n \leqq \beta}{}' e^{2\pi i F(n)} - \int_\alpha^\beta e^{2\pi i F(u)}\, du\right| < \frac{9}{4},$$

wo der Strich bedeutet, daß ein Glied mit $n = \alpha$ bzw. $n = \beta$ gegebenen Falls nach Belieben mitgezählt wird oder nicht.

Beweis. Wenn für m ganz, > 0

$$\chi_m(u) = -\frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{m}\frac{\sin 2h\pi u}{h}$$

gesetzt wird, ist

$$(17)\quad \begin{cases} -2\pi i \displaystyle\int_\alpha^\beta \chi_m(u)\, e^{2\pi i F(u)} F'(u)\, du = \sum_{h=1}^{m}\frac{1}{h}\int_\alpha^\beta 2i\sin 2h\pi u \cdot e^{2\pi i F(u)}\, F'(u)\, du \\ = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\sum_{h=1}^{m}\frac{1}{h}\int_\alpha^\beta\left(\frac{F'(u)}{F'(u)+h}\, d\, e^{2\pi i (F(u)+hu)} - \frac{F'(u)}{F'(u)-h}\, d\, e^{2\pi i (F(u)-hu)}\right). \end{cases}$$

Wegen $|F'(u)| \leqq \frac{1}{2}$ und der Monotonie von $\dfrac{F'(u)}{F'(u) \pm h}$ ist nach dem zweiten Mittelwertsatz der Ausdruck (17) absolut genommen höchstens

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h}\left(\frac{\frac{1}{2}}{h-\frac{1}{2}}\cdot 2\sqrt{2} + \frac{\frac{1}{2}}{h-\frac{1}{2}}\cdot 2\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h(h-\frac{1}{2})} \\ \qquad = \dfrac{4\sqrt{2}}{\pi}\displaystyle\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2h-1} - \frac{1}{2h}\right) = \frac{4\sqrt{2}\log 2}{\pi}. \end{cases}$$

Nach der Eulerschen Summenformel ist nun

$$(19)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha \leqq n \leqq \beta}{}' e^{2\pi i F(n)} = \int_\alpha^\beta e^{2\pi i F(u)}\, du + \bar{\chi}(-\beta)\, e^{2\pi i F(\beta)} \\ \qquad + \bar{\bar{\chi}}(\alpha)\, e^{2\pi i F(\alpha)} + 2\pi i \displaystyle\int_\alpha^\beta \chi(u)\, e^{2\pi i F(u)}\, F'(u)\, du. \end{cases}$$

Hierin ist $\chi(u) = \bar{\chi}(u) = \bar{\bar{\chi}}(u) = u - [u] - \frac{1}{2}$, wenn u nicht ganz ist; falls u ganz ist, ist $\chi(u) = 0$, und $\bar{\chi}(u)$ bzw. $\bar{\bar{\chi}}(u)$ hat den Wert $\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$, je nachdem das eventuelle Glied mit $n = \beta$ bzw. $n = \alpha$ mitgezählt

wird oder nicht. Da bekanntlich[10]) $\chi(u)$ und $\chi_m(u)$ beschränkt sind, und falls u nicht ganz ist, der Beziehung

$$\operatorname*{Lim}_{m=\infty} \chi_m(u) = \chi(u)$$

genügen, ergibt sich aus (17) und (18), daß das letzte Glied in (19) absolut $\leqq \frac{4\sqrt{2}\log 2}{\pi} < \frac{5}{4}$ ist, so daß (16) aus (19) folgt wegen $|\bar{\chi}(-\beta)| \leqq \frac{1}{2}$ und $|\bar{\bar{\chi}}(\alpha)| \leqq \frac{1}{2}$.

Anwendung. Wir werden jetzt aus diesem Satz die Ungleichung (3) ableiten und dabei vorläufig $a \leqq 1$ voraussetzen.

Es sei zu diesem Zweck zunächst h ganz und es werde

$$u_1 = \frac{h - 2ab - \frac{1}{2}}{a^2}, \quad u_2 = \frac{h - 2ab + \frac{1}{2}}{a^2}, \quad F(u) = \frac{1}{2}(au + 2b)^2 - hu$$

gesetzt. Für $u_1 \leqq u \leqq u_2$ ist dann

$$|F'(u)| = |a(au + 2b) - h| \leqq \tfrac{1}{2},$$

also nach (16)

$$\left|\sum_{u_1 \leqq n \leqq u_2}{}' e^{2\pi i F(n)} - \int_{u_1}^{u_2} e^{2\pi i F(u)} du\right| < \frac{9}{4}. \tag{20}$$

Hierin ist, wenn $\left|au + 2b - \frac{h}{a}\right| = \sqrt{v}$ gesetzt wird,

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{2\pi i F(u)} du = \frac{1}{a} e^{-\pi i \frac{h^2 - 4abh}{a^2}} \int_0^{\frac{1}{4a^2}} e^{\pi i v} \frac{dv}{\sqrt{v}}. \tag{21}$$

Es ist

$$\int_0^{\frac{1}{4a^2}} e^{\pi i v} \frac{dv}{\sqrt{v}} = e^{\frac{\pi i}{4}} - \int_{\frac{1}{4a^2}}^{\infty} e^{\pi i v} \frac{dv}{\sqrt{v}}. \tag{22}$$

Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist hierin das Schlußglied absolut $\leqq \sqrt{4a^2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\pi} < 2a$, so daß aus (20), (21) und (22) folgt

$$\left|\sum_{u_1 \leqq n \leqq u_2}{}' e^{\pi i (an + 2b)^2} - \frac{1}{a} e^{-\pi i \left(\frac{h^2 - 4abh}{a^2} - \frac{1}{4}\right)}\right| < \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4}. \tag{23}$$

---

[10]) Vgl. z. B. E. Landau, *Die Bedeutung der Pfeifferschen Methode für die analytische Zahlentheorie* [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse 71, Abt. IIa (1912), S. 2195–2332], S. 2209 (Hilfssatz 4) und S. 2207 (Hilfssatz 1). In diesen Hilfssätzen ist

$$\varphi_m(u) = 1 - \chi_m'(u)$$

gesetzt.

Falls $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ vorausgesetzt und dann im Obigen eine der Zahlen u_1 und u_2 abgeändert wird, nämlich u_1 zu $\frac{h-2ab+\gamma}{a^2}$ oder u_2 zu $\frac{h-2ab-\gamma}{a^2}$, bleibt (20) gelten, aber statt (21) bekommen wir

$$(24) \qquad \int_{u_1}^{u_2} e^{2\pi i F(u)} du = \frac{1}{2a} e^{-\pi i \frac{h^2-4abh}{a^2}} \int_{\frac{\gamma^2}{a^2}}^{\frac{1}{4a^2}} e^{\pi i v} \frac{dv}{\sqrt{v}}.$$

Nun ist für $0 \leq v_1 < v_2$

$$(25) \qquad \left| \int_{v_1}^{v_2} e^{\pi i v} \frac{dv}{\sqrt{v}} \right|$$

kleiner als 3; denn wenn $v_2 \leq \frac{1}{2}$ ist, ist (25) nach dem ersten Mittelwertsatz $\leq 2\sqrt{v_2} < \frac{3}{2}$, wenn $\frac{1}{2} \leq v_1$ ist, ist (25) nach dem zweiten Mittelwertsatz $\leq \frac{1}{\sqrt{v_1}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\pi} < \frac{3}{2}$ und wenn $v_1 < \frac{1}{2} < v_2$ ist, zerfällt (25) in zwei Teile, deren jeder $< \frac{3}{2}$ ist. Statt (23) finden wir also jetzt, mit Rücksicht auf (20) und (24),

$$(26) \qquad \left| \sum_{u_1 \leq n \leq u_2} e^{\pi i (an+2b)^2} \right| < \frac{9}{4} + \frac{3}{2a}.$$

Weiterhin ist jetzt das Intervall $\frac{\alpha-b}{a} \leq u \leq \frac{\beta-b}{a}$ die Summe der Intervalle $\frac{h-2ab-\frac{1}{2}}{a^2} \leq u \leq \frac{h-2ab+\frac{1}{2}}{a^2}$, wo h die Reihe der ganzen Zahlen $\geq a(\alpha+b)$ und $\leq a(\beta+b)$ durchläuft, eventuell vermehrt oder vermindert um ein oder zwei Intervalle der Gestalt $\frac{h-2ab-\frac{1}{2}}{a^2} \leq u \leq \frac{h-2ab-\gamma}{a^2}$ oder $\frac{h-2ab+\gamma}{a^2} \leq u \leq \frac{h-2ab+\frac{1}{2}}{a^2}$, wo $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ ist. Falls auf die zuerst bzw. zuletzt genannten Teilintervalle (23) bzw. (26) angewendet wird, findet man

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{\frac{\alpha-b}{a} \leq n \leq \frac{\beta-b}{a}} e^{\pi i (an+2b)^2} - \frac{1}{a} \sum_{a(\alpha+b) \leq h \leq a(\beta+b)} e^{-\pi i \left(\frac{h^2-4abh}{a^2} - \frac{1}{4}\right)} \right| \\
&\qquad < \frac{17}{4}\left((\beta-\alpha)a+1\right) + 2\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{2a}\right) \\
&\qquad < \frac{17}{4}(\beta-\alpha)a + 9 + \frac{3}{a} \\
&\qquad \leq \frac{17}{4}(\beta-\alpha)a + 6\left(1+\frac{1}{a}\right)
\end{aligned}$$

wegen $a \leq 1$, und hieraus ergibt sich, nach Multiplikation der beiden

Seiten mit $\sqrt{a}\,e^{-2\pi i b^2 - \frac{\pi i}{8}}$, mit Rücksicht auf die Definition (2) der Funktion $g(a, b)$

(27) $$\left|g(a, b) - \bar{g}\left(\frac{1}{a}, -b\right)\right| < \frac{17}{4}(\beta - \alpha)a^{\frac{3}{2}} + 6\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Hiermit ist aber (3) bewiesen, falls $a \leqq 1$, also auch falls $a > 1$ ist, da in obenstehender Ungleichung a durch $\frac{1}{a}$, b durch $-b$ und i durch $-i$ ersetzt werden kann und die linke Seite dadurch nicht geändert wird.

Um nunmehr mit (3) die Gaußsche Summe $S = \sum_{n=1}^{q} e^{2\pi i \frac{n^2}{q}}$ (q ganz > 0) zu berechnen, setzen wir $a = \sqrt{\frac{2}{q}}$, $b = 0$, $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2q}}$ und $\beta = s\sqrt{2q}$, wo s eine beliebige positive ganze Zahl ist. Dann ist

$$g\left(\sqrt{\frac{2}{q}}, 0\right) = \sqrt[4]{\frac{2}{q}} \sum_{n=1}^{sq} e^{\pi i\left(\frac{2n^2}{q} - \frac{1}{8}\right)} = s e^{-\frac{\pi i}{8}} \sqrt[4]{\frac{2}{q}}\, S$$

und

$$\bar{g}\left(\sqrt{\frac{q}{2}}, 0\right) = \sqrt[4]{\frac{q}{2}} \sum_{n=1}^{2s} e^{-\pi i\left(\frac{qn^2}{2} - \frac{1}{8}\right)} = s e^{-\frac{\pi i}{8}} \sqrt[4]{\frac{q}{2}}\left(e^{-\pi i\left(\frac{q}{2} - \frac{1}{4}\right)} + e^{\frac{\pi i}{4}}\right)$$

$$= s e^{-\frac{\pi i}{8}} \sqrt[4]{\frac{q}{2}}\, Q\sqrt{2},$$

wo Q den Wert $1 + i$, 1, 0 oder i hat, je nachdem $q \equiv 0$, 1, 2 oder 3 (mod 4) ist. Aus (3) folgt also

$$s\left|\sqrt[4]{\frac{2}{q}}\, S - \sqrt[4]{\frac{q}{2}}\, Q\sqrt{2}\right| < \frac{17}{4} s\sqrt{2q}\sqrt[4]{\left(\frac{2}{q}\right)^3} + 6\left(\sqrt[4]{\frac{q}{2}} + \sqrt[4]{\frac{2}{q}}\right),$$

und da diese Ungleichung für jedes positive ganze s gelten muß,

(28) $$\left|S - Q\sqrt{q}\right| \leqq \sqrt[4]{\frac{q}{2}} \cdot \frac{17}{4}\sqrt{2q}\sqrt[4]{\left(\frac{2}{q}\right)^3} = \frac{17}{2}.$$

Elementar beweist man $S = \pm Q\sqrt{q}$; es ist also $S = 0$, wenn $q \equiv 2$ (mod 4) ist. Falls $q \not\equiv 2$ (mod 4) und $q \geqq 19$ ist, ist nicht $S = -Q\sqrt{q}$; denn dann würde die linke Seite von (28)

$$2\,|Q|\sqrt{q} \geqq 2\sqrt{q} \geqq 2\sqrt{19} > \frac{17}{2}$$

sein. Um zu zeigen, daß stets $S = Q\sqrt{q}$ ist, braucht man diese Beziehung also nur noch zu prüfen in den Fällen, wo $q \not\equiv 2$ (mod 4) und $q \leqq 17$ ist.

Wenn man obige Betrachtungen nicht erst auf $g(a, b)$, sondern unmittelbar auf die Gaußsche Summe S anwendet, und etwas weniger verschwenderisch mit den numerischen Faktoren umgeht, findet man (28)

mit einer kleineren Konstante rechts, z. B. 5 statt $\frac{17}{2}$, und dann braucht man die Beziehung $S = Q\sqrt{q}$ nur noch zu prüfen für $q = 1, 3, 4$ und 5.

Hilfssatz 1. *Unter Voraussetzung* A, *wo jedoch* $\alpha - \frac{1}{2}$ *und* $\beta - \frac{1}{2}$ *nicht ganz zu sein brauchen, ist, falls* $f'(u)$ *stets* $\geqq 0$ *oder stets* $\leqq 0$ *ist,*

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{2\pi i f(u)}\,du\right| < \frac{11}{8\sqrt{\varrho}}.$$

Beweis. Ist die Weglänge $\beta - \alpha \leqq \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varrho}}$, so ist die Behauptung trivial, da das Integral dann absolut $\leqq \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varrho}} < \frac{11}{8\sqrt{\varrho}}$ ist.

Anderenfalls schneiden wir von dem Ende, wo $|f'(u)|$ am kleinsten ist, ein Stück der Länge $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varrho}}$ ab; dessen Beitrag zum Integral ist absolut $\leqq \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varrho}}$. Auf der verbleibenden Strecke ist $f'(u)$ beständig zu- oder abnehmend, von festem Vorzeichen und nach (4) absolut $\geqq \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varrho}}\cdot\varrho = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\varrho}$. Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist also, wegen

$$\int e^{2\pi i f(u)}\,du = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\,e^{2\pi i f(u)}}{f'(u)},$$

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{2\pi i f(u)}\,du\right| \leqq \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varrho}} + \frac{2\sqrt{2}}{2\pi\cdot\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\varrho}} = \frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varrho}} < \frac{11}{8\sqrt{\varrho}}.$$

Hilfssatz 2. *Unter Voraussetzung* A, *wo jedoch* $\alpha - \frac{1}{2}$ *und* $\beta - \frac{1}{2}$ *nicht ganz zu sein brauchen, ist*

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{2\pi i f(u)}\,du\right| < \frac{11}{4\sqrt{\varrho}}.$$

Beweis. Da $f'(u)$ beständig zu- oder abnimmt, zerfällt der Weg in zwei Teilstrecken, auf deren jeder $f'(u)$ stets $\geqq 0$ oder stets $\leqq 0$ ist, und Hilfssatz 1 ist auf jede derselben anzuwenden.

Satz 2. *Unter Voraussetzung* A *ist*

$$\left|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i f(n)}\right| < 4\,\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|+1}{\sqrt{\varrho}}, \tag{29}$$

und wenn außerdem $0 < f'(\alpha) < f'(\beta)$ *ist,*

$$(30)\qquad \Big|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i f(n)}\Big| < \frac{19}{2}\cdot\frac{f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}} + \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Beweis. Es sei h ganz, $\alpha \leqq \gamma < \delta \leqq \beta$ und im Intervall $\gamma \leqq u \leqq \delta$ entweder $h - \frac{1}{2} \leqq f'(u) \leqq h$ oder $h \leqq f'(u) \leqq h + \frac{1}{2}$. Nach Satz 1 und Hilfssatz 1 ist

$$(31)\qquad \Big|\sum_{\gamma\leqq n\leqq\delta}{}' e^{2\pi i f(n)}\Big| = \Big|\sum_{\gamma\leqq n\leqq\delta}{}' e^{2\pi i (f(n)-hn)}\Big|$$
$$\leqq \Big|\int_\gamma^\delta e^{2\pi i(f(u)-hu)}\,du\Big| + \frac{9}{4} < \frac{11}{8\sqrt{\varrho}} + \frac{9}{4}.$$

Es sei k ganz, $\alpha \leqq \varepsilon < \zeta \leqq \beta$ und im Intervall $\varepsilon \leqq u \leqq \zeta$ stets $k - \frac{1}{2} \leqq f'(u) \leqq k + \frac{1}{2}$. Nach Satz 1 und Hilfssatz 2 ist

$$(32)\qquad \Big|\sum_{\varepsilon\leqq n\leqq\zeta}{}' e^{2\pi i f(n)}\Big| \leqq \Big|\int_\varepsilon^\zeta e^{2\pi i(f(u)-ku)}\,du\Big| + \frac{9}{4} < \frac{11}{4\sqrt{\varrho}} + \frac{9}{4}.$$

Da Summe (29) zerlegbar ist, entweder in höchstens $|f'(\beta) - f'(\alpha)|$ Summen (32) und zwei Summen (31), oder in höchstens $|f'(\beta) - f'(\alpha)| + \frac{1}{2}$ Summen (32) und eine Summe (31) oder in höchstens $|f'(\beta) - f'(\alpha)| + 1$ Summen (32), ist also

$$(33)\qquad \Big|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i f(n)}\Big| < \Big(\frac{11}{4\sqrt{\varrho}} + \frac{9}{4}\Big)\cdot(|f'(\beta) - f'(\alpha)| + 1) + \frac{9}{4}.$$

Nun ist die erste Behauptung unseres Satzes trivial im Falle $\sqrt{\varrho} \geqq \frac{1}{4}$, da die linke Seite nach (7) höchstens $\beta - \alpha < \frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|+1}{\varrho}$ ist; wenn $\sqrt{\varrho} < \frac{1}{4}$ ist, folgt die erste Behauptung unmittelbar aus der letzten Ungleichung; denn dann ist

$$\Big|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i f(n)}\Big| < \Big(\frac{11}{4\sqrt{\varrho}} + \frac{9}{2}\Big)\cdot(|f'(\beta) - f'(\alpha)| + 1) < 4\,\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|+1}{\sqrt{\varrho}}$$

wegen

$$\frac{11}{4\sqrt{\varrho}} + \frac{9}{2} < \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\Big(\frac{11}{4} + \frac{9}{8}\Big) < \frac{4}{\sqrt{\varrho}}.$$

Da die zweite Behauptung trivial ist, wenn $\sqrt{\varrho} \geqq \frac{2}{19}$ ist, setzen wir weiter $\sqrt{\varrho} < \frac{2}{19}$, also

$$\frac{11}{4\sqrt{\varrho}} + \frac{9}{4} < \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\Big(\frac{11}{4} + \frac{1}{4}\Big) = \frac{3}{\sqrt{\varrho}}$$

voraus. Wenn dann $f'(\beta) \geqq \frac{1}{2}$ ist, ist nach (33)

$$\Big|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i f(n)}\Big| < \frac{3}{\sqrt{\varrho}}\cdot 3 f'(\beta) + \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{9\sqrt{\varrho}}\cdot 2 f'(\beta) = \frac{19}{2}\,\frac{f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}};$$

falls dagegen $0 < f'(\alpha) < f'(\beta) < \frac{1}{2}$ ist, folgt aus Satz 1 und dem zweiten Mittelwertsatz wegen der Monotonie von $f'(u)$

$$\Big|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i f(n)}\Big| < \frac{9}{4} + \frac{1}{2\pi}\Big|\int_\alpha^\beta \frac{d\,e^{2\pi i f(u)}}{f'(u)}\Big| \leqq \frac{9}{4} + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{f'(\alpha)}\cdot 2\sqrt{2}$$
$$< \Big(\frac{81}{32} f'(\alpha) + \frac{1}{2f'(\alpha)}\Big) + \frac{1}{2f'(\alpha)} < \frac{19}{2}\cdot\frac{f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}} + \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Satz 3. *Wenn* $-\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leqq \mu \leqq \frac{1}{2}$ *ist,* A *und* (9) *erfüllt sind und* $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |a_m|\sqrt{|m|}$ *konvergiert, ist*

$$(34)\quad \begin{cases} \Big|\sum\limits_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n+\mu f(n))}\psi(f(n))\Big| \leqq 5\,\dfrac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt{\varrho}} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} |a_m|\sqrt{|m|} \\ \qquad\qquad + \dfrac{17}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\varrho}}\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{|a_m|}{\sqrt{|m|}}; \end{cases}$$

unter der ferneren Voraussetzung $|\lambda + \mu f'(\alpha)| < f'(\alpha) < f'(\beta)$ *ist*

$$(35)\quad \begin{cases} \Big|\sum\limits_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n+\mu f(n))}\psi(f(n))\Big| \leqq \dfrac{47}{4}\cdot\dfrac{f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} |a_m|\sqrt{|m|} \\ \qquad + \dfrac{27}{2}\cdot\dfrac{|\lambda|}{\sqrt{\varrho}}\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{|a_m|}{\sqrt{|m|}} + \dfrac{1}{f'(\alpha)-|\lambda+\mu f'(\alpha)|}\sum\limits_{-\infty}^{\infty}{}' \dfrac{|a_m|}{m}. \end{cases}$$

Beweis. Nach (9) ist

$$(36)\quad \begin{cases} \Big|\sum\limits_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n+\mu f(n))}\psi(f(n))\Big| \leqq \sum\limits_{|m+\mu|\leqq\frac{1}{\varrho}} |a_m|\cdot\Big|\sum\limits_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n+(m+\mu)f(n))}\Big| \\ \qquad + \sum\limits_{|m+\mu|>\frac{1}{\varrho}} |a_m|\cdot(\beta-\alpha) \end{cases}$$

und hierin nach (7)

$$(37)\quad \begin{cases} \sum\limits_{|m+\mu|>\frac{1}{\varrho}} |a_m|\cdot(\beta-\alpha) \leqq \sum\limits_{|m+\mu|>\frac{1}{\varrho}} |a_m|\cdot\dfrac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\varrho} \\ \qquad \leqq \dfrac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt{\varrho}}\cdot \sum\limits_{|m+\mu|>\frac{1}{\varrho}} |a_m|\sqrt{|m+\mu|}. \end{cases}$$

Auf die Summe $\sum\limits_{\alpha<n<\beta}$ rechts in (36) wird der erste Teil des vorigen Satzes mit $\lambda u + (m+\mu) f(u)$ statt $f(u)$ angewendet; ϱ ist dann durch $|m+\mu|\varrho$ und $|f'(\beta)-f'(\alpha)|$ durch $|m+\mu|\cdot|f'(\beta)-f'(\alpha)|$ zu ersetzen. Hieraus folgt, mit Rücksicht auf (37), daß die linke Seite von (34) höchstens

$$4\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt{\varrho}}\sum_{|m+\mu|\leqq\frac{1}{\varrho}}|a_m|\sqrt{|m+\mu|}+\frac{4}{\sqrt{\varrho}}\sum_{|m+\mu|\leqq\frac{1}{\varrho}}\frac{a_m}{\sqrt{|m+\mu|}}$$

$$+\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt{\varrho}}\sum_{|m+\mu|>\frac{1}{\varrho}}|a_m|\sqrt{|m+\mu|}$$

$$\leqq 5\,\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt{\varrho}}\sum_{-\infty}^{\infty}|a_m|\sqrt{|m|}+\frac{17}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{|a_m|}{\sqrt{|m|}}$$

ist, letzteres wegen der für $m \neq 0$ gültigen Abschätzungen

$$4\sqrt{|m+\mu|}\leqq 4\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{|m|}<5\sqrt{|m|}$$

und

$$\frac{4}{\sqrt{|m+\mu|}}\leqq\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{|m|}}<\frac{17}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{|m|}}.$$

Hiermit ist die erste Behauptung bewiesen. Um die zweite zu beweisen, wenden wir den zweiten Teil des vorigen Satzes an mit $\pm(\lambda u + (m+\mu) f(u))$ statt $f(u)$; wir benutzen dabei das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem m positiv oder negativ ist. Dann wird $f'(\beta)$ ersetzt durch $|\lambda + (m+\mu) f'(\beta)| \leqq |\lambda| + |m+\mu| f'(\beta)$, und $f'(\alpha)$ durch $|\lambda + (m+\mu) f'(\alpha)| \geqq |m|\{f'(\alpha) - |\lambda + \mu f'(\alpha)|\}$, so daß wir mit Rücksicht auf (36) und (37) wegen $\frac{19}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{47}{4}$ und $\frac{19}{2}\sqrt{2} < \frac{27}{2}$ finden, daß die linke Seite von (35) höchstens den Wert hat

$$\frac{19}{2}\cdot\frac{f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}}\sum_{|m+\mu|\leqq\frac{1}{\varrho}}|a_m|\sqrt{|m+\mu|}+\frac{19}{2}\cdot\frac{|\lambda|}{\sqrt{\varrho}}\sum_{|m+\mu|\leqq\frac{1}{\varrho}}\frac{|a_m|}{\sqrt{|m+\mu|}}$$

$$+\frac{1}{f'(\alpha)-|\lambda+\mu f'(\alpha)|}\sum_{|m+\mu|\leqq\frac{1}{\varrho}}\frac{|a_m|}{|m|}+\frac{f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}}\sum_{|m+\mu|>\frac{1}{\varrho}}|a_m|\sqrt{|m+\mu|}$$

$$<\frac{47}{4}\cdot\frac{f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}}\sum_{-\infty}^{\infty}|a_m|\sqrt{|m|}+\frac{27}{2}\cdot\frac{|\lambda|}{\sqrt{\varrho}}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{|m|}}{|a_m|}$$

$$+\frac{1}{f'(\alpha)-|\lambda+\mu f'(\alpha)|}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{|a_m|}{|m|}.$$

Bemerkung. Man findet (10) und (11), wenn man in den Behauptungen des vorstehenden Satzes $\lambda = \mu = 0$ und $a_m = \frac{1}{2\pi^2 m^2}$ $(m \gtrless 0)$ setzt, und die Ungleichungen

$$(38) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\sqrt{m}} < 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \int_3^{\infty} \frac{du}{u\sqrt{u}} < 1 + 0{,}4 + 0{,}2 + 1{,}2 = 2{,}8$$

und

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} < 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \int_3^{\infty} \frac{du}{u^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{18} < \frac{\pi^2}{8}$$

anwendet.

Satz 4. *Wenn* $-\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leqq \mu \leqq \frac{1}{2}$ *ist,* (9) *fast überall*[11]) *gilt und* $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|a_m|}{\sqrt{|m|}}$ *konvergiert, ist unter Voraussetzung* A *für jedes* $t > 0$

$$(39) \qquad t\left|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n + \mu f(n))} \int_0^{\pm\frac{1}{t}} \psi(f(n)+y)\,dy\right|$$

höchstens gleich

$$(40) \qquad \begin{cases} 5\,\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt{\varrho}} \sum_{|m|\leqq t} |a_m|\sqrt{|m|} + \frac{5}{3}\cdot\frac{t\,|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt{\varrho}} \sum_{|m|>t} \frac{|a_m|}{\sqrt{|m|}} \\ \qquad + \frac{17}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varrho}} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|a_m|}{\sqrt{|m|}}\,; \end{cases}$$

wenn außerdem $|\lambda + \mu f'(\alpha)| < f'(\alpha) < f'(\beta)$ *ist, ist der Ausdruck* (39) *höchstens gleich*

$$(41) \qquad \begin{cases} \frac{47}{4}\cdot\frac{f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}} \sum_{|m|\leqq t} |a_m|\sqrt{|m|} + 4\,\frac{t f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}} \sum_{|m|>t} \frac{|a_m|}{\sqrt{|m|}} \\ \qquad + \frac{27}{2}\cdot\frac{|\lambda|}{\sqrt{\varrho}} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|a_m|}{\sqrt{|m|}} + \frac{1}{f'(\alpha) - |\lambda + \mu f'(\alpha)|} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|a_m|}{|m|}. \end{cases}$$

Beweis. Es ist

$$t\int_0^{\pm\frac{1}{t}} \psi(v+y)\,dy = \sum_{-\infty}^{\infty} b_m e^{2m\pi i v} \quad \text{mit} \quad b_m = a_m t \int_0^{\pm\frac{1}{t}} e^{2m\pi i y}\,dy,$$

also

$$|b_m| \leqq |a_m| \quad \text{und} \quad |b_m| \leqq |a_m|\cdot t\cdot\frac{2}{2|m|\pi} < \frac{t}{3}\cdot\frac{|a_m|}{|m|},$$

so daß der Satz aus dem vorangehenden mit b_m statt a_m folgt.

---

[11]) „Fast überall" soll heißen: überall mit Ausnahme höchstens abzählbar unendlich vieler Punkte. Das Integral in (39) ist im Riemannschen, nötigenfalls im Lebesgueschen Sinne genommen.

Bemerkung. Falls in diesem Satze $\lambda = \mu = 0$ gesetzt wird, und es eine positive Zahl γ gibt mit der Eigenschaft

$$\psi(v_2) - \psi(v_1) \leqq \gamma(v_2 - v_1)$$

für jedes Zahlenpaar v_1 und $v_2 > v_1$, dann ist $\left|\sum_{\alpha<n<\beta} \psi(f(n))\right|$ höchstens gleich dem Ausdruck (40), vermehrt um $\frac{\gamma\,|f'(\beta) - f'(\alpha)|}{2t\varrho}$, bzw. höchstens gleich dem Ausdruck (41) (mit $\lambda = \mu = 0$), vermehrt um $\frac{\gamma f'(\beta)}{2t\varrho}$; denn nach (7) ist dann

$$t \sum_{\alpha<n<\beta} \int_0^{\frac{1}{t}} \Big(\psi\big(f(n)+y\big) - \psi\big(f(n)\big)\Big)\,dy \leqq t(\beta-\alpha)\int_0^{\frac{1}{t}} \gamma y\,dy$$

$$\leqq \frac{\gamma}{2t}\cdot\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\varrho}$$

und

$$t \sum_{\alpha<n<\beta} \int_{-\frac{1}{t}}^{0} \Big(\psi\big(f(n)\big) - \psi\big(f(n)+y\big)\Big)\,dy \leqq t(\beta-\alpha)\int_{-\frac{1}{t}}^{0} \gamma |y|\,dy$$

$$\leqq \frac{\gamma}{2t}\cdot\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\varrho}.$$

Hieraus folgt als Spezialfall (12) bzw. (13), wenn man

$$\psi(v) = v - [v] - \tfrac{1}{2}, \qquad \gamma = 1, \qquad a_m = \frac{i}{2\pi m} \qquad (m \gtrless 0),$$

$$t = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\varrho}} \text{ bzw. } \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\varrho}}$$

setzt, und

(42) $$\sum_{m\leqq t} \frac{1}{\sqrt{m}} < 2\sqrt{t}, \qquad \sum_{m>t} \frac{1}{m\sqrt{m}} < \frac{3}{\sqrt{t}},$$

sowie (38) benutzt.

Satz 5. *Wenn* $-\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leqq \mu \leqq \frac{1}{2}$ *ist, sowie A und B gelten, ist der Ausdruck* (39) *für jedes* $t > 0$ *kleiner als*

$$\frac{14\sqrt{t}\,|f'(\beta)-f'(\alpha)| + 15}{\sqrt{\varrho}},$$

und wenn außerdem $|\lambda + \mu f'(\alpha)| < f'(\alpha) < f'(\beta)$ *ist, ist der Ausdruck* (39) *kleiner als*

$$32\cdot\frac{\sqrt{t}\,f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}} + 35\cdot\frac{|\lambda|}{\sqrt{\varrho}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{f'(\alpha) - |\lambda + \mu f'(\alpha)|}.$$

Beweis. Bekanntlich ist unter der Voraussetzung B die Funktion $\psi(v)$ fast überall[11]) in eine Fouriersche Reihe (9) entwickelbar mit

$$a_m = \int_0^1 e^{-2m\pi i v}\psi(v)\,dv \quad \text{und} \quad |a_m| \leqq \frac{1}{2|m|\pi}\cdot 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi|m|}.$$

Aus (40) mit Rücksicht auf (42) und (38) folgt also, daß der Ausdruck (39) höchstens

$$5\cdot\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt{\varrho}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot 2\sum_{m\leqq t}\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{5}{3}\cdot\frac{t\,|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt{\varrho}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot 2\sum_{m>t}\frac{1}{m\sqrt{m}}$$

$$+\frac{17}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\sqrt{m}} < \frac{14\sqrt{t}\,|f'(\beta)-f'(\alpha)|+15}{\sqrt{\varrho}}$$

ist, und wenn $|\lambda+\mu f'(\alpha)| < f'(\alpha) < f'(\beta)$ ist, finden wir aus (41) auf dieselbe Art, daß der Ausdruck (39) höchstens den Wert hat

$$\frac{47}{4}\cdot\frac{f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot 2\sum_{m\leqq t}\frac{1}{\sqrt{m}} + 4\cdot\frac{t f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot 2\sum_{m>t}\frac{1}{m\sqrt{m}} + \frac{27}{2}\cdot\frac{|\lambda|}{\sqrt{\varrho}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\sqrt{m}}$$

$$+\frac{1}{f'(\alpha)-|\lambda+\mu f'(\alpha)|}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$$

$$< 32\cdot\frac{\sqrt{t}\,f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}} + 35\cdot\frac{|\lambda|}{\sqrt{\varrho}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{f'(\alpha)-|\lambda+\mu f'(\alpha)|}.$$

Erste Anwendung. *Unter den Voraussetzungen* A *und* B *ist*

$$(43)\qquad \Big|\sum_{\alpha<n<\beta}\psi(f(n))\Big| < 31\cdot\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{45}{\sqrt{\varrho}},$$

und wenn außerdem $0 < f'(\alpha) < f'(\beta)$ *ist, ist*

$$(44)\qquad \Big|\sum_{\alpha<n<\beta}\psi(f(n))\Big| < 53\cdot\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Beweis. Es bezeichne t eine Zahl >1. Falls das betrachtete $\psi(v)$ nicht abnimmt, wenden wir den vorigen Satz an 1) auf *dieses* $\psi(v)$ mit $\lambda=\mu=0$ und $\frac{1}{t}$ als obere Grenze des Integrals 2) auf $\varphi(v)-\frac{1}{t}$ statt $\psi(v)$, wenn $\varphi(v)$ die Periode 1, im Intervall $0\leqq v\leqq\frac{1}{t}$ den Wert 1 und im Intervall $\frac{1}{t}<v<1$ den Wert 0 hat. Falls aber das betrachtete $\psi(v)$ nicht zunimmt, nehmen wir $-\frac{1}{t}$ statt $\frac{1}{t}$ als obere Grenze des Integrals und wenden Satz 5 an, indem wir dabei $\psi(v)$ nicht durch $\varphi(v)-\frac{1}{t}$, sondern durch $\varphi(-v)-\frac{1}{t}$ ersetzen. Wir werden beim Beweise weiter voraussetzen, daß $\psi(v)$ im Intervall $0<v<1$ nicht abnimmt.

Um für $0 \leqq y \leqq \frac{1}{t}$ die Ungleichung

$$\psi(v) \leqq \psi(v+y) + 2\varphi(v+y) \tag{45}$$

zu beweisen, genügt es, das Intervall $0 \leqq v+y < 1$ zu betrachten. Wenn $0 \leqq v+y \leqq \frac{1}{t}$ ist, gilt die Ungleichung wegen $\psi(v) \geqq -1$, $\psi(v+y) \leqq 1$ und $\varphi(v+y) = 1$; wenn $\frac{1}{t} < v+y < 1$, also $0 < v \leqq v+y < 1$ ist, gilt (45) wegen $\psi(v) \leqq \psi(v+y)$ und $\varphi(v+y) = 0$. Aus (45) ergibt sich, mit Rücksicht auf (7),

$$\tag{46} \left\{ \begin{aligned} \sum_{\alpha<n<\beta} \psi(f(n)) &\leqq t \sum_{\alpha<n<\beta} \int_0^{\frac{1}{t}} \psi(f(n)+y)\,dy + 2t \sum_{\alpha<n<\beta} \int_0^{\frac{1}{t}} \varphi(f(n)+y)\,dy \\ &\leqq t \sum_{\alpha<n<\beta} \int_0^{\frac{1}{t}} \psi(f(n)+y)\,dy + 2t \sum_{\alpha<n<\beta} \int_0^{\frac{1}{t}} \left(\varphi(f(n)+y) - \frac{1}{t}\right) dy \\ &\qquad + \frac{2\,|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{t\varrho}. \end{aligned} \right.$$

Die erste Behauptung des vorigen Satzes mit $\lambda = \mu = 0$, $\psi(v) =$ dem gegenwärtigen $\psi(v)$ bzw. $\psi(v) = \varphi(v) - \frac{1}{t}$, angewendet auf (46), gibt

$$\tag{47} \begin{aligned} \sum_{\alpha<n<\beta} \psi(f(n)) &< 3 \cdot \frac{14\sqrt{t}\,|f'(\beta)-f'(\alpha)| + 15}{\sqrt{\varrho}} + 2 \cdot \frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{t\varrho} \\ &= \frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}} \left(42\sqrt{t}\,\sqrt[6]{\varrho} + \frac{2}{t\sqrt[3]{\varrho}}\right) + \frac{45}{\sqrt{\varrho}}. \end{aligned}$$

Falls $\varrho \geqq \frac{1}{21^2}$ ist, ist (43) trivial wegen (7) und $\sqrt[3]{21^2} < 31$, und wenn $\varrho < \frac{1}{21^2}$ ist, darf in (47) gesetzt werden

$$t = \frac{1}{\sqrt[3]{21^2}\,\sqrt[3]{\varrho}}, \qquad \text{also} \quad 42\sqrt{t}\,\sqrt[6]{\varrho} + \frac{2}{t\sqrt[3]{\varrho}} = 4\sqrt[3]{21^2} < 31,$$

und dann ist

$$\sum_{\alpha<n<\beta} \psi(f(n)) < 31 \cdot \frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{45}{\sqrt{\varrho}}.$$

Diese Ungleichung gilt für jede Funktion $\psi(v)$, welche der Bedingung B genügt, also auch für die Funktion $-\psi(v)$, womit (43) vollständig bewiesen ist.

Die zweite Behauptung von Satz 5 mit $\lambda = \mu = 0$, $\psi(v) = \psi(v)$ bzw. $\psi(v) = \varphi(v) - \frac{1}{t}$, angewendet auf (46), gibt

$$
(48)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha<n<\beta} \psi(f(n)) < 3\left(\dfrac{32\sqrt{t}\,f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}} + \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{f'(\alpha)}\right) + \dfrac{2f'(\beta)}{t\varrho} \\ \qquad = \dfrac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}}\left(96\sqrt{t}\,\sqrt[6]{\varrho} + \dfrac{2}{t\sqrt[3]{\varrho}}\right) + \dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{1}{f'(\alpha)}. \end{cases}
$$

Falls $\varrho \geqq \frac{1}{48^2}$ ist, ist (44) trivial wegen $\sqrt[3]{48^2} < 53$, und wenn $\varrho < \frac{1}{48^2}$ ist, folgt (44) aus (48) mit $t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{48^2}\cdot\sqrt[3]{\varrho}}$ wegen

$$
96\sqrt{t}\,\sqrt[6]{\varrho} + \frac{2}{t\sqrt[3]{\varrho}} = 4\sqrt[3]{48^2} < 53.
$$

Zweite Anwendung. *Wenn* $-\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leqq \mu \leqq \frac{1}{2}$ *ist, ist unter den Voraussetzungen* A *und* B

$$
(49)\quad \left|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n+\mu f(n))}\psi(f(n))\right| < 93\cdot\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{135}{\sqrt{\varrho}},
$$

und wenn außerdem $|\lambda + \mu f'(\alpha)| < f'(\alpha) < f'(\beta)$ *ist,*

$$
(50)\quad \left|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n+\mu f(n))}\psi(f(n))\right| < 159\cdot\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + 35\cdot\frac{|\lambda|}{\sqrt{\varrho}} + \frac{14}{f'(\alpha)-|\lambda+\mu f'(\alpha)|}.
$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\psi(v)$ im Intervall $0 < v < 1$ nicht-abnehmend voraussetzen, da $\psi(v)$ durch $-\psi(v)$ ersetzt werden kann. Es bezeichne t eine Zahl > 1, $\varphi(v)$ eine Funktion mit der Periode 1, welche im Intervall $0 \leqq v \leqq \frac{1}{t}$ den Wert 1, im Intervall $\frac{1}{t} < v < 1$ den Wert 0 hat. Um zu beweisen, daß für $0 \leqq y \leqq \frac{1}{t}$

$$
(51)\quad |\psi(v+y) - \psi(v)| \leqq \psi(v+y) - \psi(v) + 4\varphi(v+y)
$$

ist, genügt es, die Strecke $0 \leqq v+y < 1$ zu betrachten. Wenn $0 \leqq v+y \leqq \frac{1}{t}$ ist, gilt (51) wegen $|\psi| \leqq 1$ und $\varphi(v+y) = 1$, und wenn $\frac{1}{t} < v+y < 1$, also $0 < v \leqq v+y < 1$ ist, gilt (51) wegen $\psi(v) \leqq \psi(v+y)$ und $\varphi(v+y) = 0$. Es ist

$$
(52)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n+\mu f(n))}\psi(f(n)) = t\sum\limits_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n+\mu f(n))}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{t}}\psi(f(n)+y)\,dy \\ \qquad - t\sum\limits_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n+\mu f(n))}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{t}}\big(\psi(f(n)+y) - \psi(f(n))\big)\,dy \end{cases}
$$

und das letzte Glied hat nach (51), mit Rücksicht auf (7), höchstens den absoluten Wert

$$(53)\begin{cases} t\sum\limits_{\alpha<n<\beta}\int\limits_0^{\frac{1}{t}}|\psi(f(n)+y)-\psi(f(n))|\,dy \leqq t\sum\limits_{\alpha<n<\beta}\int\limits_0^{\frac{1}{t}}\psi(f(n)+y)\,dy \\ -\sum\limits_{\alpha<n<\beta}\psi(f(n))+4t\sum\limits_{\alpha<n<\beta}\int\limits_0^{\frac{1}{t}}\left(\varphi(f(n)+y)-\frac{1}{t}\right)dy+\frac{4|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{t\varrho} \end{cases}$$

Aus (52) und (53) folgt, wenn auf die verschiedenen Glieder bzw. Satz 5, Satz 5 mit $\lambda=\mu=0$, die vorige Anwendung und schließlich Satz 5 mit $\lambda=\mu=0$ und $\varphi(v)-\frac{1}{t}$ statt $\psi(v)$ angewendet wird, daß die linke Seite von (49) kleiner ist als

$$\begin{aligned} &2\cdot\frac{14\sqrt{t}\,|f'(\beta)-f'(\alpha)|+15}{\sqrt{\varrho}}+\left(31\cdot\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}}+\frac{45}{\sqrt{\varrho}}\right) \\ &\quad+4\cdot\frac{14\sqrt{t}\,|f'(\beta)-f'(\alpha)|+15}{\sqrt{\varrho}}+4\cdot\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{t\varrho} \\ &\quad=\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}}\left(31+84\sqrt{t}\sqrt[6]{\varrho}+\frac{4}{t\sqrt[3]{\varrho}}\right)+\frac{135}{\sqrt{\varrho}}, \end{aligned}$$

und daß die linke Seite von (50) kleiner ist als

$$\begin{aligned} &\left(32\cdot\frac{\sqrt{t}f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}}+35\cdot\frac{|\lambda|}{\sqrt{\varrho}}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{f'(\alpha)-|\lambda+\mu f'(\alpha)|}\right)+\left(32\cdot\frac{\sqrt{t}f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{f'(\alpha)}\right) \\ &\quad+\left(53\cdot\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{f'(\alpha)}\right)+4\left(32\cdot\frac{\sqrt{t}f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{f'(\alpha)}\right)+4\cdot\frac{f'(\beta)}{t\varrho} \\ &\quad<\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}}\left(53+192\sqrt{t}\sqrt[6]{\varrho}+\frac{4}{t\sqrt[3]{\varrho}}\right)+35\cdot\frac{|\lambda|}{\sqrt{\varrho}}+\frac{14}{f'(\alpha)-|\lambda+\mu f'(\alpha)|}. \end{aligned}$$

Hieraus folgen aber unsere beiden Behauptungen; denn diese sind trivial, falls $\varrho\geqq\frac{1}{21^2}$ bzw. $\geqq\frac{1}{48^2}$ ist, und sonst kann man $t=\frac{1}{\sqrt[3]{21^2}\sqrt[3]{\varrho}}$ bzw. $t=\frac{1}{\sqrt[3]{48^2}\sqrt[3]{\varrho}}$ setzen, also

$$31+84\sqrt{t}\sqrt[6]{\varrho}+\frac{4}{t\sqrt[3]{\varrho}}=31+8\sqrt[3]{21^2}<93$$

$$\text{bzw.}\quad 53+192\sqrt{t}\sqrt[6]{\varrho}+\frac{4}{t\sqrt[3]{\varrho}}=53+8\sqrt[3]{48^2}<159.$$

Dritte Anwendung. *Es seien die Voraussetzungen* A *und* B *erfüllt. Wenn* $-\frac{1}{2}\leqq\lambda\leqq\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\leqq\mu\leqq\frac{1}{2}$ *ist und* λ *und* μ *nicht beide verschwinden, gibt es eine nur von* λ, μ *abhängige Konstante* c_1 *mit der Eigenschaft*

$$\left|\sum_{\alpha<n<\beta}e^{2\pi i(\lambda n+\mu f(n)-\psi(f(n)))}\right|<c_1\left(\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}}+\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right).$$

Wenn $-\frac{1}{2} \leqq \mu \leqq \frac{1}{2}$, $\mu \neq 0$, $0 < f'(\alpha) < f'(\beta)$ *ist, gibt es eine nur von* μ *abhängige Konstante* c_2 *mit der Eigenschaft*

$$\left|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i f(n) - \psi(f(n))}\right| < c_2\left(\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{1}{f'(\alpha)}\right).$$

Beweis. Beim Beweis bezeichnen c_3, c_5 und c_7 geeignet gewählte Konstanten, welche nur von λ und μ; c_4, c_6 und c_8 geeignete Konstanten, welche nur von μ abhängen.

Es ist

$$(55)\qquad \left|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n+\mu f(n))}\right| < c_3\left(\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right).$$

Denn falls $\mu = 0$ ist, ist $\lambda \neq 0$, also die linke Seite kleiner als eine nur von λ abhängige Konstante; falls dagegen $\mu \neq 0$ ist, darf (29) angewendet werden mit $\lambda u + \mu f(u)$ statt $f(u)$, und dann wird ϱ durch $|\mu|\varrho$, $|f'(\beta) - f'(\alpha)|$ durch $|\mu|.|f'(\beta) - f'(\alpha)|$ ersetzt, so daß die linke Seite von (55) in diesem Falle kleiner ist als

$$c_3\,\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|+1}{\sqrt{\varrho}} \leqq c_3\left(\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right).$$

Wenn dagegen $\mu \neq 0$, $0 < f'(\alpha) < f'(\beta)$ ist, darf (30) mit $|\mu| f(u)$ statt $f(u)$ angewendet werden, und man findet dann auf dieselbe Art

$$(56)\qquad \left|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i\mu f(n)}\right| < c_4\left(\frac{f'(\beta)}{\sqrt{\varrho}} + \frac{1}{f'(\alpha)}\right) \leqq c_4\left(\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{1}{f'(\alpha)}\right).$$

Nun ist

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n+\mu f(n))}\left(e^{-2\pi i\psi(f(n))} - \int_0^1 e^{-2\pi i\psi(v)}dv\right)\right| \\ &= \left|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n+\mu f(n))}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(-2\pi i)^h}{h!}\left(\psi^h(f(n)) - \int_0^1 \psi^h(v)\,dv\right)\right| \\ &\leqq \sum_{h=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^h}{h!}\left|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n+\mu f(n))}\left(\psi^h(f(n)) - \int_0^1 \psi^h(v)\,dv\right)\right|, \end{aligned}\right.$$

vorbehaltlich des sogleich zu erledigenden Beweises für die Konvergenz der letzten Reihe. Die Funktion

$$\psi^h(v) - \int_0^1 \psi^h(v)\,dv$$

erfüllt Voraussetzung B, wenn h ungerade ist, und sie ist die Summe von zwei Funktionen, welche der Voraussetzung B genügen, wenn h gerade ist. Nach (49) ist daher

$$\Big|\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i(\lambda n+\mu f(n))}\Big(\psi^h(f(n))-\int_0^1\psi^h(v)\,dv\Big)\Big|<c_5\left(\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}}+\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right),$$

also die rechte Seite von (57) kleiner als

$$(58)\qquad c_5\left(\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}}+\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right)\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^h}{h!}=c_7\left(\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}}+\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right).$$

Nach (50) mit $\lambda=0$ ist ferner, $0<f'(\alpha)<f'(\beta)$ und $\mu\neq 0$, $|\mu|\leqq\frac{1}{2}$ vorausgesetzt,

$$(59)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^h}{h!}\Big|\sum_{\alpha<n<\beta}e^{2\pi i\mu f(n)}\Big(\psi^h(f(n))-\int_0^1\psi^h(v)\,dv\Big)\Big|\\&\qquad<c_6\left(\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}}+\frac{1}{f'(\alpha)}\right)\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^h}{h!}=c_8\left(\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}}+\frac{1}{f'(\alpha)}\right).\end{aligned}\right.$$

Wegen

$$\Big|\int_0^1 e^{2\pi i\psi(v)}\,dv\Big|\leqq 1$$

folgt die erste Behauptung aus (55), (57) und (58), die zweite aus (56), (57) mit $\lambda=0$ und (59).

Hilfssatz 3. *Es sei λ reell, nicht ganz; es sei Voraussetzung* A *erfüllt*[12]) *und es werde für $\alpha\leqq u\leqq\beta$*

$$g(u)=\frac{e^{2\pi i\lambda u}}{2i\sin\pi\lambda}\Big(f(u)+\frac{i}{2}f'(u)\operatorname{cotg}\pi\lambda\Big)$$

gesetzt. Dann ist

$$\Big|\sum_{\alpha<n<\beta}e^{2\pi i\lambda n}f(n)-g(\beta)+g(\alpha)\Big|\leqq\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{2\sin^2\pi\lambda}.$$

Beweis. Beim Beweise bezeichnen Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 und Θ_5 geeignet gewählte Zahlen $\geqq -1$ und $\leqq 1$. Für jede ganze Zahl $n>\alpha$ und $<\beta$ ist

$$\begin{aligned}g\Big(n+\frac{1}{2}\Big)=\frac{e^{2\pi i\lambda(n+\frac{1}{2})}}{2i\sin\pi\lambda}\Big(&f(n)+\frac{1}{2}f'(n)+\frac{1}{2}\Theta_1\Big(f'\Big(n+\frac{1}{2}\Big)-f'(n)\Big)\\&+\frac{i}{2}\Big(f'(n)+\Theta_2\Big(f'\Big(n+\frac{1}{2}\Big)-f'(n)\Big)\Big)\operatorname{cotg}\pi\lambda\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g\Big(n-\frac{1}{2}\Big)=\frac{e^{2\pi i\lambda(n-\frac{1}{2})}}{2i\sin\pi\lambda}\Big(&f(n)-\frac{1}{2}f'(n)+\frac{1}{2}\Theta_3\Big(f'(n)-f'\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big)\\&+\frac{i}{2}\Big(f'(n)+\Theta_4\Big(f'(n)-f'\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big)\Big)\operatorname{cotg}\pi\lambda\Big)\end{aligned}$$

---

[12]) Ungleichung (4) braucht hier nicht erfüllt zu sein.

also

$$g\left(n+\tfrac{1}{2}\right)-g\left(n-\tfrac{1}{2}\right)-e^{2\pi i\lambda n}f(n)$$

$$=\frac{e^{2\pi i\lambda n}f'(n)}{4i\sin\pi\lambda}\left(e^{\pi i\lambda}+ie^{\pi i\lambda}\operatorname{cotg}\pi\lambda+e^{-\pi i\lambda}-ie^{-\pi i\lambda}\operatorname{cotg}\pi\lambda\right)$$

$$+\Theta_5\frac{f'(n+\frac{1}{2})-f'(n-\frac{1}{2})}{2\sin^2\pi\lambda}=\Theta_5\frac{f'(n+\frac{1}{2})-f'(n-\frac{1}{2})}{2\sin^2\pi\lambda}$$

und wegen der Monotonie von $f'(u)$ folgt hieraus die Behauptung durch Summation über alle ganzen Zahlen $n>\alpha$ und $<\beta$.

Satz 6. *Es sei Voraussetzung A erfüllt; es sei* $-\frac{1}{2}\leqq\lambda\leqq\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\leqq\mu\leqq\frac{1}{2}$, $\gamma-\frac{1}{2}$ *ganz, und es werde für* $\alpha\leqq u\leqq\beta$ *im Falle* $\lambda\neq 0$

$$g(u)=\frac{e^{2\pi i\lambda u}}{2i\sin\pi\lambda}\left(f(u)-\gamma+\frac{i}{2}f'(u)\operatorname{cotg}\pi\lambda\right)$$

gesetzt. Es sei weiter im Intervall $\alpha\leqq u\leqq\beta$ *stets* $f(u)\geqq\gamma$; *es bezeichne* G *den Bereich* $\alpha\leqq u\leqq\beta$, $\gamma\leqq v\leqq f(u)$, *und es werde gesetzt*

$$A(G)=\sum_G e^{2\pi i(\lambda u+\mu v)},$$

erstreckt über die Koordinatenpaare u *und* v *der Gitterpunkte von* G. *Endlich sei*

$$\begin{aligned}
T(G)&=A(G)-\iint_G du\,dv && \textit{falls } \lambda=\mu=0,\\
&=A(G)-g(\beta)+g(\alpha) && \textit{falls } \lambda\neq 0,\ \mu=0,\\
&=A(G)-\frac{ie^{2\pi i\mu\gamma}}{2\sin\pi\mu}(\beta-\alpha) && \textit{falls } \lambda=0,\ \mu\neq 0,\\
&=A(G) && \textit{falls } \lambda\neq 0,\ \mu\neq 0.
\end{aligned}$$

Dann gibt es eine nur von λ *und* μ *abhängige Konstante* c_9 *mit der Eigenschaft*

$$|T(G)|<c_9\left(\frac{|f'(\beta)-f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}}+\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right),$$

und wenn außerdem $\lambda=0$, $0<f'(\alpha)<f'(\beta)$ *ist, gibt es eine nur von* μ *abhängige Konstante* c_{10} *mit der Eigenschaft*

$$|T(G)|<c_{10}\left(\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}}+\frac{1}{f'(\alpha)}\right).$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\gamma=\frac{1}{2}$ setzen; denn wenn G um eine ganze Strecke w parallel zu der positiven v-Achse verschoben wird, wird $T(G)$ um $e^{2\pi i\mu w}$ multipliziert, ändert $|T(G)|$ sich also nicht. Wir zerlegen den Beweis in vier verschiedene Teile:

1. Es sei $\lambda = \mu = 0$. Dann ist

$$A(G) = \sum_{\alpha<n<\beta} [f(n)] = \sum_{\alpha<n<\beta}\left(f(n) - \frac{1}{2}\right) - \sum_{\alpha<n<\beta}\left(f(n) - [f(n)] - \frac{1}{2}\right).$$

Nach (12) bzw. (13) ist das letzte Glied absolut kleiner als

$$5 \cdot \frac{|f'(\beta) - f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{6}{\sqrt{\varrho}} \quad \text{bzw.} \quad 9\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

Ferner ist nach der Eulerschen Summenformel

$$\sum_{\alpha<n<\beta}\left(f(n) - \frac{1}{2}\right) - \int_\alpha^\beta \left(f(u) - \frac{1}{2}\right)du = \int_\alpha^\beta \chi(u) f'(u)\,du$$
$$= \int_\alpha^\beta \chi(u)\left(f'(u) - f'(\alpha)\right)du,$$

wo $\chi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}$ gesetzt ist, und der absolute Betrag des letzten Integrals ist wegen der Monotonie von $f'(u) - f'(\alpha)$ und wegen

$$\left|\int \chi(u)\,du\right| \leqq \frac{1}{8}$$

nach dem zweiten Mittelwertsatz höchstens $\frac{1}{8}|f'(\beta) - f'(\alpha)|$. Es ist also in diesem Falle

$$|T(G)| < 6\left(\frac{|f'(\beta) - f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right) \quad \text{bzw.} \quad < 10\left(\frac{f'(\beta)}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{1}{f'(\alpha)}\right).$$

2. Es sei $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$. Dann ist

$$A(G) = \sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i \lambda n}[f(n)] = \sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i \lambda n}\left(f(n) - \frac{1}{2}\right)$$
$$- \sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i \lambda n}\left(f(n) - [f(n)] - \frac{1}{2}\right).$$

Auf das letzte Glied ist (49) mit $\mu = 0$, auf das vorletzte der vorige Hilfssatz mit $f(u) - \frac{1}{2}$ statt $f(u)$ anwendbar, so daß

$$|T(G)| < \frac{|f'(\beta) - f'(\alpha)|}{2\sin^2 \pi\lambda} + 93\,\frac{|f'(\beta) - f'(\alpha)|}{\sqrt[3]{\varrho^2}} + \frac{135}{\sqrt{\varrho}}$$

ist.

3. Es sei $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$. Dann folgt die Behauptung aus

$$A(G) = \sum_{\alpha<u<\beta}\sum_{v=1}^{[f(u)]} e^{2\pi i \mu v} = \frac{i e^{\pi i \mu}}{2\sin \pi\mu}(\beta - \alpha) + \frac{1}{2i\sin\pi\mu}\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i \mu (f(n) - \chi(f(n)))},$$

da auf das Schlußglied die Ergebnisse der dritten Anwendung des vorigen Satzes mit $\mu\chi(v) = \mu\left(v - [v] - \frac{1}{2}\right)$ statt $\psi(v)$ anzuwenden ist.

4. Es sei $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$. Dieselbe Beweisanordnung wie in 3, aber statt $\frac{ie^{\pi i\mu}}{2\sin\pi\mu}(\beta-\alpha)$ bekommen wir jetzt das Glied

$$\frac{ie^{\pi i\mu}}{2\sin\pi\mu}\sum_{\alpha<n<\beta} e^{2\pi i\lambda n},$$

dessen absoluter Betrag $\leqq \frac{1}{2\,|\sin\pi\lambda\sin\pi\mu|}$ ist.

Anwendung. *Es sei λ, μ, p und q reell, λ und μ nicht ganz, $f>0$, $h>0$, $h>fq-hp>-f$. Dann konvergiert die das Produkt*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\lambda m}}{m^{fs-p}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\mu n}}{n^{hs-q}}$$

darstellende Dirichletsche Reihe für $\Re(s)>\mathrm{Max}\left(\frac{1+2p+q}{2f+h},\ \frac{1+p+2q}{f+2h}\right)$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $-\frac{1}{2}\leqq\lambda\leqq\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\leqq\mu\leqq\frac{1}{2}$ (also $\lambda\neq0$, $\mu\neq0$), $p\geqq0$ und $q\geqq0$ voraussetzen; denn der Satz ändert sich nicht, wenn man λ und μ um eine ganze Zahl vermehrt und s, p, q bzw. durch $s+s_0$, $p+fs_0$, $q+hs_0$ ersetzt, wo s_0 eine beliebige reelle Zahl bezeichnet. Bekanntlich genügt es zu beweisen

$$\sum_{G}=\sum_{G}e^{2\pi i(\lambda u+\mu v)}u^{p}v^{q}=O(y)\ {}^{13}), \tag{60}$$

wo die Summe $\sum\limits_{G}$ ausgedehnt wird über die Koordinatenpaare u und v der Gitterpunkte des in Figur 1 gezeichneten Bereiches

$$G\ldots\ \tfrac{1}{2}\leqq u,\qquad \tfrac{1}{2}\leqq v,\qquad u^{f}v^{h}\leqq x,$$

und wo y den Wert $x^{\frac{1+2p+q}{2f+h}}$, $x^{\frac{1+2p+q}{2f+h}}\log x=x^{\frac{1+p+2q}{f+2h}}\log x$ oder $x^{\frac{1+p+2q}{f+2h}}$ hat, je nachdem $\frac{1+2p+q}{2f+h}>$, $=$ oder $<\frac{1+p+2q}{f+2h}$ ist.

Für hinreichend großes x wird G durch die Geraden $u=\left[x^{\frac{1}{f+h}}\right]-\frac{1}{2}$ und $v=\left[x^{\frac{1}{f+h}}\right]-\frac{1}{2}$ zerlegt in die vier in Figur 1 gezeichneten Teilbereiche G', G'', G''', G^{IV}. Wegen $\lambda\neq0$, $\mu\neq0$, $p\geqq0$, $q\geqq0$ und

$$\frac{1+p+2q}{f+2h}-\frac{p+q}{f+h}=\frac{f+h+fq-hp}{(f+2h)(f+h)}>0 \tag{61}$$

---

[13]) In diesem Beweis bezieht sich das Zeichen O auf x; die Abschätzungen sind zwar gleichmäßig in den Zahlen, welche beim Beweis eingeführt werden (y, r, t, ν, n), jedoch nicht in λ, μ, p, q, f und h.

ist

(62) $$\sum_{G'} = \sum_{u=1}^{\left[x^{\frac{1}{f+h}}\right]-1} e^{2\pi i \lambda u^p} \sum_{v=1}^{\left[x^{\frac{1}{f+h}}\right]-1} e^{2\pi i \mu v^q} = O\left(x^{\frac{p+q}{f+h}}\right) = O(y).$$

G'' enthält eine beschränkte Anzahl von Gitterpunkten und zwar mit Koordinaten $O\left(x^{\frac{1}{f+h}}\right)$, so daß nach (61) auch

(63) $$\sum_{G''} = O(y)$$

ist. Es genügt jetzt die erste der zwei Abschätzungen

(64) $$\sum_{G'''} = O(y), \qquad \sum_{G^{IV}} = O(y)$$

zu beweisen; denn die zweite ergibt sich aus der ersten durch Vertauschung von u und v, λ und μ, p und q, f und h, und (60) folgt dann aus (62), (63) und (64).

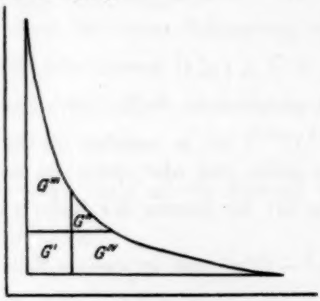

Fig. 1.

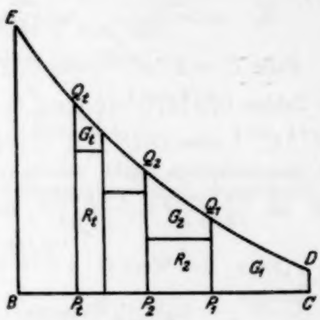

Fig. 2.

Es sei also G''' der in Figur 2 gezeichnete Bereich $BCDE$, so daß die Abszisse von C den Wert $\left[x^{\frac{1}{f+h}}\right] - \frac{1}{2}$, die von B den Wert $\frac{1}{2}$ hat. Wir betrachten auf BC die Punkte P_τ $(1 \leqq \tau \leqq t)$ mit Abszisse $\left[2^{-\tau} x^{\frac{1}{f+h}}\right] - \frac{1}{2}$, wo t die durch die Ungleichungen

(65) $$x^{\frac{1}{f+2h}} \leqq 2^{-t} x^{\frac{1}{f+h}} < 2\, x^{\frac{1}{f+2h}}$$

eindeutig bestimmte ganze Zahl bezeichnet; für hinreichend großes x ist $t > 0$ und die Lage der Punkte P_τ wie in Figur 2 angegeben. Es sei Q_τ $(1 \leqq \tau \leqq t)$ mit Koordinaten u_τ, v_τ der Schnittpunkt der Kurve DE mit der Geraden, welche durch P_τ parallel zur v-Achse gezogen ist, und es mögen u_0, v_0 die Koordinaten von D, sowie u_B, v_B die Koordinaten von B bezeichnen. Wegen

$$\frac{hp-fq}{h} > -1, \qquad u_t < 2x^{\frac{1}{f+2h}}$$

und

$$\frac{q}{h} + \frac{hp-fq+h}{h} \cdot \frac{1}{f+2h} = \frac{1+p+2q}{f+2h}$$

ist

$$(66)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{BP_tQ_tE} = \sum_{u=1}^{u_t-\frac{1}{2}} e^{2\pi i\lambda u} u^p \sum_{v=v_B+\frac{1}{2}}^{\left[x^{\frac{1}{h}} u^{-\frac{f}{h}}\right]} e^{2\pi i\mu v} v^q = O \sum_{u=1}^{u_t-\frac{1}{2}} u^p x^{\frac{q}{h}} u^{-\frac{fq}{h}} \\ \displaystyle\quad = O\left(x^{\frac{q}{h}} u_t^{\frac{hp-fq+h}{h}}\right) = O\left(x^{\frac{1+p+2q}{f+2h}}\right) = O(y). \end{cases}$$

Jedes der t anderen Teilgebiete von $BCDE$ (vgl. Figur 2) wird durch die Gerade $v = [v_{\tau-1}] - \frac{1}{2}$ zerlegt in ein eventuell verschwindendes Rechteck R_τ und ein Gebiet G_τ (R_1 verschwindet stets). Im Falle $2 \leqq \tau \leqq t$ ist

$$(67)\quad \sum_{R_\tau} = \sum_{u_\tau < u < u_{\tau-1}} e^{2\pi i\lambda u} u^p \sum_{v_B < v < [v_{\tau-1}]} e^{2\pi i\mu v} v^q = O(u_\tau^p v_\tau^q) = O(u_\tau^{p+\frac{1}{2}} v_\tau^{q+\frac{1}{2}}).$$

Falls $U_\tau = 2^{-\tau} x^{\frac{1}{f+2h}}$ und $U_\tau^f V_\tau^h = x$ $(1 \leqq \tau \leqq t)$ gesetzt wird, bilden die Zahlen $U_\tau^{p+\frac{1}{2}} V_\tau^{q+\frac{1}{2}}$ $(1 \leqq \tau \leqq t)$ eine geometrische Reihe, deren Summe $tU_t^{p+\frac{1}{2}} V_t^{q+\frac{1}{2}}$ oder $O(U_1^{p+\frac{1}{2}} V_1^{q+\frac{1}{2}} + U_t^{p+\frac{1}{2}} V_t^{q+\frac{1}{2}})$ ist, je nachdem die Glieder der geometrischen Reihe untereinander gleich sind oder nicht; im ersten Fall ist $\frac{1+2p+q}{2f+h} = \frac{1+p+2q}{f+2h}$, und es hat die Summe der Reihe wegen $t = O(\log x)$ den Wert $O\left(x^{\frac{1+2p+q}{2f+h}} \log x\right) = O(y)$ und im zweiten Falle ist die Summe

$$O\left(x^{\frac{2+3p+3q}{3(f+h)}} + x^{\frac{1+2p+q}{2f+h}}\right) = O(y),$$

da $\frac{2+3p+3q}{3(f+h)}$ zwischen $\frac{1+2p+q}{2f+h}$ und $\frac{1+p+2q}{f+2h}$ liegt. Es ist also stets

$$(68)\quad \sum_{\tau=1}^{t} u_\tau^{p+\frac{1}{2}} v_\tau^{q+\frac{1}{2}} = O \sum_{\tau=1}^{t} U_\tau^{p+\frac{1}{2}} V_\tau^{q+\frac{1}{2}} = O(y).$$

Um zu beweisen, daß die Behauptung wahr ist, genügt es jetzt zu beweisen

$$(69)\quad \sum_{G_\tau} = O(u_\tau^{p+\frac{1}{2}} v_\tau^{q+\frac{1}{2}}) \qquad (1 \leqq \tau \leqq t);$$

denn (64) folgt dann aus (66), (67), (69) und (68). Um (69) abzuleiten, brauchen wir Satz 6. Die Strecken $u - \frac{1}{2} =$ ganz zerlegen den in Figur 3 gezeichneten Bereich G_τ in die Teilgebiete $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Auf den Bereich $H_1 + H_2 + \ldots + H_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$ ist Satz 6 mit

$v = f(u) = x^{\frac{1}{h}} u^{-\frac{f}{h}}$ anwendbar. Wegen $f'(u) = -\frac{f}{h}\cdot\frac{v}{u}$ darf hierbei in der ersten Behauptung von Satz 6 der Ausdruck $|f'(\beta)-f'(\alpha)|$ durch die größere Zahl $\frac{f}{h}\cdot\frac{v_r}{u_r}$ ersetzt werden. Wenn

$$\varrho = \frac{v_{r-1}}{u_{r-1}^2}\,\mathrm{Min}\left(\frac{f(f+h)}{h^2}, \frac{1}{2}\right)$$

gesetzt wird, ist ferner

$$f''(u) = \frac{f(f+h)}{h^2}\cdot\frac{v}{u^2} \geq \varrho,$$

und es ist nach (65)

$$U_{t-1} > x^{\frac{1}{f+2h}}, \qquad V_{t-1} < x^{\frac{2}{f+2h}}, \qquad \frac{V_{t-1}}{U_{t-1}^2} < 1,$$

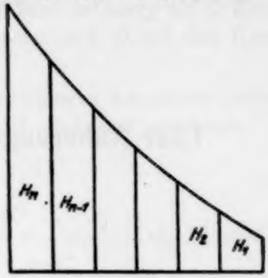

Fig. 3.

so daß $\frac{v_{r-1}}{u_{r-1}^2}\cdot\frac{1}{2} \leq \frac{v_{t-1}}{2u_{t-1}^2}$, also auch ϱ bei hinreichend großem x kleiner als 1 ist. Nach der ersten Behauptung von Satz 6 wird also

$$A(H_1+H_2+\dots+H_\nu) = O\left(\frac{\frac{v_r}{u_r}}{\sqrt[3]{\left(\frac{v_{r-1}}{u_{r-1}^2}\right)^2}}\right) = O(u_r^{\frac{1}{3}} v_r^{\frac{1}{3}}).$$

Hieraus folgt, falls w_ν die Abszisse der Gitterpunkte in H_ν bezeichnet,

$$\sum_{G_r} e^{2\pi i(\lambda u+\mu v)} u^p$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^p A(H_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu^p \left(A(H_1+H_2+\dots+H_\nu) - A(H_1+H_2+\dots+H_{\nu-1})\right)$$

$$= w_n^p A(H_1+\dots+H_n) + \sum_{\nu=1}^{n-1}(w_\nu^p - w_{\nu+1}^p)\, A(H_1+\dots+H_\nu)$$

$$= w_n^p\cdot O(u_r^{\frac{1}{3}} v_r^{\frac{1}{3}}) + O(u_r^{\frac{1}{3}} v_r^{\frac{1}{3}}) \sum_{\nu=1}^{n-1}(w_\nu^p - w_{\nu+1}^p)$$

$$= w_1^p\, O(u_r^{\frac{1}{3}} v_r^{\frac{1}{3}}) = O(u_r^{p+\frac{1}{3}} v_r^{\frac{1}{3}}).$$

Mittels der in G_r liegenden Strecken $v - \frac{1}{2} =$ ganz leitet man hieraus auf ähnliche Art (nach Vertauschung von u und v) (69) ab, womit die Anwendung vollständig bewiesen ist.

(Eingegangen am 17. 12. 1920.)

Über Näherungswerte algebraischer Zahlen.

Von

Carl Siegel in Göttingen.

In meiner Dissertation[1]) bewies ich als Spezialfall allgemeinerer Sätze: Für jede algebraische Zahl ξ vom Grade $n \geq 2$ hat die Ungleichung

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{1}{q^{2\sqrt{n}}} \qquad (q > 0)$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen Zahlen p, q.

In der vorliegenden Arbeit verallgemeinere ich meine früheren Überlegungen und gelange u. a. zu folgendem

Satz. Es seien $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$ die Näherungsbrüche bei der Entwicklung einer reellen algebraischen Zahl ξ vom Grade $n \geq 2$ in einen regelmäßigen Kettenbruch. Dann gibt es unter diesen Näherungsbrüchen eine unendliche Teilfolge $\frac{p_{m_1}}{q_{m_1}}, \frac{p_{m_2}}{q_{m_2}}, \ldots$, für welche die Ungleichung

$$\left|\xi - \frac{p_{m_\nu}}{q_{m_\nu}}\right| > \frac{1}{q_{m_\nu}^{\alpha}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

mit $\alpha = e\left(\log n + \frac{1}{2\log n}\right)$ gilt.

Im folgenden bedeutet Ω den Körper der rationalen Zahlen. ξ sei eine ganze algebraische Zahl vom Grade $n \geq 2$; K_0 sei ein algebraischer Zahlkörper des Grades n_0, in bezug auf welchen die Zahl ξ den Grad $d \geq 2$ besitzt; der Körper $K_0(\xi) = K$ hat dann den Grad $dn_0 \geq n$. Ist α irgendeine algebraische Zahl und

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0 \qquad (a_0 > 0)$$

die in Ω irreduzible Gleichung für α, deren Koeffizienten teilerfremde ganze

---

[1]) Approximation algebraischer Zahlen (Göttingen 1920); (Mathematische Zeitschrift 10 (1921)). Dort findet sich ausführliche Angabe der Literatur.

Zahlen sind, so verstehe ich unter „Höhe von α" die größte der $m+1$ Zahlen $|a_0|, \dots |a_m|$ und bezeichne sie mit $H(\alpha)$. Ist P ein Polynom mit algebraischen Koeffizienten, so bedeutet das Zeichen $\overline{|P|}$ das Maximum der absoluten Beträge dieser Koeffizienten und ihrer in bezug auf Ω Konjugierten. Dieses Zeichen benutze ich auch, wenn sich P auf eine Konstante reduziert.

Von den Resultaten und Hilfssätzen meiner früheren Arbeit wird nichts vorausgesetzt, sondern alles, soweit es gebraucht wird, neu entwickelt.

§ 1.

Hilfssatz 1. Es seien $r_1, r_2, \dots, r_k$ und $m_1, m_2, \dots, m_k$ $2k$ natürliche Zahlen ($k \geqq 2$); es sei $r_1 \geqq r_2 \geqq \dots \geqq r_k$ und

$$\prod_{\nu=1}^{k}\left(\frac{m_\nu+1}{r_\nu}+1\right)-d=\vartheta>0. \tag{1}$$

Dann gibt es

1. k Polynome $F^{(\nu)}(x_1, \dots, x_k)$ $(\nu = 1, \dots, k)$ vom Grade[2]) m_ν in x_ν, $m_\lambda + r_\lambda$ in x_λ $(\lambda \neq \nu)$, mit ganzen Koeffizienten aus K,

2. ein nicht identisch verschwindendes Polynom $R(x_1, \dots, x_k)$ mit ganzen Koeffizienten aus K_0,

3. eine natürliche Zahl c_1, die nur von k, ξ, ϑ abhängt[3]),

mit folgenden Eigenschaften:

I. Es gilt identisch in $x_1, \dots x_k$

$$\sum_{\nu=1}^{k}(x_\nu-\xi)^{r_\nu}F^{(\nu)}(x_1,\dots,x_k)=R(x_1,\dots,x_k); \tag{2}$$

II. es ist, wenn $\max(r_1, \dots, r_k) = r_1 = r$ gesetzt wird,

$$\overline{|F^{(\nu)}|}<c_1^r \quad \text{für} \quad \nu=1,\dots,k, \quad \overline{|R|}<c_1^r. \tag{3}$$

Beweis. Es sei a eine natürliche Zahl und N die Anzahl[4]) der Polynome $P(x_1, \dots x_k)$ vom Grade $m_\nu + r_\nu$ in x_ν $(\nu = 1, \dots k)$ mit ganzen Koeffizienten aus K_0, die der Bedingung $\overline{|P|} \leqq a$ genügen. In $P(x_1, \dots, x_k)$ treten $\prod_{\nu=1}^{k}(m_\nu + r_\nu + 1)$ Koeffizienten auf. Ist $\omega_1, \dots, \omega_{n_0}$ eine Basis von K_0, so ist $\alpha = t_1\omega_1 + \dots + t_{n_0}\omega_{n_0}$ als Koeffizient von P sicher zulässig,

---

[2]) Grad bedeutet bei Polynomen nicht den „genauen" Grad.

[3]) Die gleiche Bedeutung haben weiterhin $c_2, c_3, \dots$.

[4]) Das ist natürlich eine endliche Zahl.

wenn $|t_\nu| \leq \frac{a}{c_4}$ $(\nu = 1, \ldots, n_0)$ ist. Solcher Zahlen α gibt es genau $\left(2\left[\frac{a}{c_4}\right]+1\right)^{n_0} \geq \left(\frac{a}{c_4}\right)^{n_0}$; folglich ist

$$N \geq \left(\frac{a}{c_4}\right)^{n_0 \prod_{\nu=1}^{k}(m_\nu + r_\nu + 1)}. \tag{4}$$

Für $\lambda_\nu = 0, \ldots, r_\nu - 1$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ sei

$$\frac{\partial^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} P(x_1, \ldots, x_k)}{\lambda_1! \ldots \lambda_k! \, \partial x_1^{\lambda_1} \ldots \partial x_k^{\lambda_k}} = P_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(x_1, \ldots, x_k); \tag{5}$$

dann ist

$$\overline{|P_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(x_1, \ldots, x_k)|} \leq \prod_{\nu=1}^{k} \binom{m_\nu + r_\nu}{\lambda_\nu} a < 2^{\sum_{\nu=1}^{k}(m_\nu + r_\nu)} a,$$

$$\overline{|P_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(\xi, \ldots, \xi)|} < 2^{\sum_{\nu=1}^{k}(m_\nu + r_\nu)} a \prod_{\nu=1}^{k} (1 + c_4 + \ldots + c_4^{m_\nu + r_\nu});$$

also, da nach (1) für $\nu = 1, \ldots, k$

$$m_\nu + r_\nu < m_\nu + r_\nu + 1 < r_\nu(d + \vartheta) \leq r(d + \vartheta) \tag{6}$$

ist,

$$\overline{|P_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(\xi, \ldots, \xi)|} < c_5^r a = t. \tag{7}$$

Für $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ sind genau $r_1 r_2 \ldots r_k$ Kombinationen möglich. Ist β eine der $r_1 \ldots r_k$ Zahlen $P_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(\xi, \ldots, \xi)$ (bei festem $P(x_1, \ldots, x_k)$), und setzt man

$\beta_\varkappa = \beta^{(\varkappa)}$ für die reellen Konjugierten von β $(\varkappa = 1, \ldots, n_1)$,

$\beta_\varkappa + i\beta_{\varkappa + n_2} = \beta^{(\varkappa)}$ für die nicht reellen Konjugierten

$(\varkappa = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2)$,

so entsprechen jedem β genau $n_1 + 2n_2 = dn_0$ reelle Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_n$, also jedem $P(x_1, \ldots, x_k)$

$$w = dn_0 r_1 \ldots r_k \tag{8}$$

reelle Zahlen, d. h. ein Punkt eines w-dimensionalen Raumes. Dieser Punkt liegt wegen (7) in einem festen Würfel von der Kantenlänge $2t$. Jede Kante zerlege ich in $3t$ gleiche Teile. Dadurch zerfällt der Würfel in $(3t)^w$ kongruente Teilwürfel von der Kantenlänge $\frac{2}{3}$. Ist nun

$$N > (3t)^w, \tag{9}$$

so sind zwei Polynomen P^* und P^{**} zwei Punkte zugewiesen, die in demselben Teilwürfel liegen; und daher ist

$$\overline{|\beta^* - \beta^{**}|} \leq \frac{2}{3}|1 + i| = \frac{2\sqrt{2}}{3} < 1$$

für jedes $\beta = P_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(\xi, \ldots, \xi)$. Sämtliche Konjugierten der ganzen Zahl $\beta^* - \beta^{**}$ sind also absolut < 1, also auch ihre Norm. Folglich ist $\beta^* = \beta^{**}$, d. h.

$$P^*_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(\xi, \ldots, \xi) = P^{**}_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(\xi, \ldots, \xi) \quad (\lambda_\nu = 0, \ldots, r_\nu - 1 \text{ für } \nu = 1, \ldots, k).$$

Die Bezeichnung (5) werde auch für $\lambda_\nu \geqq r_\nu$ beibehalten; dann ist identisch

$$P^*(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1+r_1} \cdots \sum_{\lambda_k=0}^{m_k+r_k} P^*_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(\xi, \ldots, \xi)(x_1 - \xi)^{\lambda_1} \ldots (x_k - \xi)^{\lambda_k},$$

und eine analoge Gleichung gilt für P^{**}. Ich setze nun

$$(10) \qquad P^* - P^{**} = R(x_1, \ldots, x_k),$$

$$(11) \quad \Sigma^{(\nu)} \{P^*_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(\xi, \ldots, \xi) - P^{**}_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(\xi, \ldots, \xi)\} (x_1 - \xi)^{\lambda_1} \ldots (x_k - \xi)^{\lambda_k} = (x_\nu - \xi)^{r_\nu} F^{(\nu)}(x_1, \ldots, x_k)$$

für $\nu = 1, \ldots, k$, wobei in $\Sigma^{(\nu)}$ der Summationsbuchstabe λ_ν die Werte $r_\nu, r_\nu + 1, \ldots, m_\nu + r_\nu$, dagegen λ_ϱ $(\varrho \neq \nu)$ für $\varrho < \nu$ die Werte $0, 1, \ldots, r_\varrho - 1$, für $\varrho > \nu$ die Werte $0, 1, \ldots, m_\varrho + r_\varrho$ durchläuft. Dann ist $F^{(\nu)}$ ein Polynom und (2) erfüllt.

Es ist nun noch zu zeigen, daß auch (9) durch geeignete Wahl von a erfüllt werden kann. Wegen (4), (7), (8) reicht es hin, daß

$$\left(\frac{a}{c_3}\right)^{n_0 \prod_{\nu=1}^{k} (m_\nu + r_\nu + 1)} > (3 c_5^r a)^{d n_0 r_1 \ldots r_k}$$

gilt, d. h. mit Rücksicht auf (1) ist

$$a^\vartheta > c_3^{d+\vartheta}\, 3^d\, c_5^{dr}$$

hinreichend. Dies leistet aber sicher ein

$$(12) \qquad a = c_6^r.$$

Nach (10) ist nun

$$\overline{|R|} \leqq 2a < (3 c_6)^r;$$

ferner ist für $\lambda = 1, 2, \ldots$

$$\overline{|(x - \xi)^\lambda|} < c_7^\lambda,$$

also nach (11) mit Rücksicht auf Ungleichung (7), die offenbar für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geqq 0$ gilt,

$$\overline{|F^{(\nu)}(x_1, \ldots, x_k)|} < 2 \prod_{\nu=1}^{k} (m_\nu + r_\nu + 1) c_5^r a\, c_7^{\sum_{\nu=1}^{k} (m_\nu + r_\nu)} \quad (\nu = 1, \ldots, k),$$

also nach (6) und (12)

$$\boxed{F^{(\nu)}} < c_8^r.$$

Wird noch $c_1 = \max(3c_8, c_9)$ gesetzt, so ist alles bewiesen[5]).

Fortan setze ich für $0 \leqq \varrho_\nu \leqq r_\nu$

$$(13)\quad F^{(\nu)}_{\varrho_1 \ldots \varrho_k}(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\lambda_\nu = 0}^{\varrho_\nu} \binom{r_\nu}{\varrho_\nu - \lambda_\nu} (x_\nu - \xi)^{\lambda_\nu} \frac{\partial^{\varrho_1 + \cdots + \lambda_\nu + \cdots + \varrho_k} F^{(\nu)}(x_1, \ldots, x_k)}{\varrho_1! \ldots \lambda_\nu! \ldots \varrho_k!\, \partial x_1^{\varrho_1} \ldots \partial x_\nu^{\lambda_\nu} \ldots \partial x_k^{\varrho_k}},$$

$$(14)\qquad R_{\varrho_1 \ldots \varrho_k}(x_1, \ldots, x_k) = \frac{\partial^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_k} R(x_1, \ldots, x_k)}{\varrho_1! \ldots \varrho_k!\, \partial x_1^{\varrho_1} \ldots \partial x_k^{\varrho_k}},$$

wo $F^{(\nu)}$ und R die in Hilfssatz 1 bestimmten Polynome bedeuten.

Hilfssatz 2. Es gilt identisch in $x_1, \ldots, x_k$

$$(15)\qquad \sum_{\nu=1}^{k} (x_\nu - \xi)^{r_\nu - \varrho_\nu} F^{(\nu)}_{\varrho_1 \ldots \varrho_k}(x_1, \ldots, x_k) = R_{\varrho_1 \ldots \varrho_k}(x_1, \ldots, x_k);$$

es ist für $\nu = 1, \ldots, k$

$$(16)\qquad |F^{(\nu)}_{\varrho_1 \ldots \varrho_k}(x_1, \ldots, x_k)| < c_9^r \prod_{\mu=1}^{k} (1 + |x_\mu|)^{m_\mu + r_\mu};$$

es ist

$$(17)\qquad |R_{\varrho_1 \ldots \varrho_k}(x_1, \ldots, x_k)| < c_{10}^r \prod_{\mu=1}^{k} (1 + |x_\mu|)^{m_\mu + r_\mu}.$$

Dieselben Abschätzungen gelten für die Polynome mit konjugierten Koeffizienten.

Beweis. (15) ergibt sich, wenn auf (2) die Operation

$$\frac{\partial^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_k}}{\varrho_1! \ldots \varrho_k!\, \partial x_1^{\varrho_1} \ldots \partial x_k^{\varrho_k}}$$

---

[5]) Die Bedeutung des Hilfssatzes 1 liegt in der Abschätzung (3). Der erste Teil (Formel (2)) ist fast trivial: Man betrachte irgendein Polynom $R(x_1, \ldots, x_k)$ vom Grade $m_\nu + r_\nu$ in x_ν $(\nu = 1, \ldots, k)$ mit ganzen Koeffizienten aus K_0 und unterwerfe dieselben den Bedingungen

$$(18)\quad \left(\frac{\partial^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} R(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1^{\lambda_1} \ldots \partial x_k^{\lambda_k}}\right)_{x_1 = \xi, \ldots, x_k = \xi} = 0 \quad (\lambda_\nu = 0, \ldots, r_\nu - 1 \text{ für } \nu = 1, \ldots, k).$$

Zugleich mit der links stehenden Zahl verschwinden die d in bezug auf K_0 konjugierten Zahlen; und man erhält für die $\prod_{\nu=1}^{k} (m_\nu + r_\nu + 1)$ unbekannten Koeffizienten $d\, r_1 \ldots r_k$ homogene lineare Gleichungen. Wegen (1) haben diese eine von der trivialen verschiedene Lösung; und wegen (18) läßt sich dann der Taylorschen Entwicklung von R an der Stelle $x_1 = \xi, \ldots, x_k = \xi$ die Form (2) geben.

ausgeübt und (13), (14) beachtet wird. Ferner ist nach (3) und (14)

$$\overline{|R_{\varrho_1\cdots\varrho_k}|} < c_1^r \prod_{\nu=1}^{k} \binom{m_\nu + r_\nu}{\varrho_\nu} < c_1^r\, 2^{\sum\limits_{\nu=1}^{k}(m_\nu + r_\nu)} < c_{10}^r,$$

$$|R_{\varrho_1\cdots\varrho_k}(x_1, \ldots, x_k)| < c_{10}^r \sum_{\lambda_1=0}^{m_1+r_1} \cdots \sum_{\lambda_k=0}^{m_k+r_k} |x_1^{\lambda_1} \ldots x_k^{\lambda_k}| \leqq c_{10}^r \prod_{\mu=1}^{k} (1+|x_\mu|)^{m_\mu + r_\mu}.$$

Endlich ist nach (3) für beliebiges λ_ν

$$\left|\frac{\partial^{\varrho_1+\cdots+\lambda_\nu+\cdots+\varrho_k} F^{(\nu)}(x_1,\ldots,x_k)}{\varrho_1!\ldots\lambda_\nu!\ldots\varrho_k!\,\partial x_1^{\varrho_1}\ldots\partial x_\nu^{\lambda_\nu}\ldots\partial x_k^{\varrho_k}}\right|$$

$$\leqq c_1^r \binom{m_1+r_1}{\varrho_1} \ldots \binom{m_\nu}{\lambda_\nu} \ldots \binom{m_k+r_k}{\varrho_k} (1+|x_\nu|)^{m_\nu-\lambda_\nu} \prod_\alpha{}' (1+|x_\alpha|)^{m_\alpha+r_\alpha},$$

wo in Π' über alle $\alpha \neq \nu$ zu multiplizieren ist; mit (13) folgt dann

$$|F_{\varrho_1\cdots\varrho_k}^{(\nu)}(x_1,\ldots,x_k)|$$

$$< c_{11}^r \prod_\alpha{}' (1+|x_\alpha|)^{m_\alpha+r_\alpha} \sum_{\lambda_\nu=0}^{m_\nu} \binom{r_\nu}{\varrho_\nu - \lambda_\nu} (|x_\nu| + c_{12})^{\lambda_\nu} (1+|x_\nu|)^{m_\nu-\lambda_\nu}$$

$$< c_{11}^r\, 2^{r_\nu} (1 + c_{12} + 2|x_\nu|)^{m_\nu} \prod_\alpha{}' (1+|x_\alpha|)^{m_\alpha+r_\alpha} < c_9^r \prod_{\mu=1}^{k} (1+|x_\mu|)^{m_\mu+r_\mu},$$

q. e. d.

Hilfssatz 3. Es seien $g_1, \ldots, g_p$ p Polynome in k Variablen $x_1, \ldots, x_k$ mit Koeffizienten aus K_0. Dann ist die Anzahl der in bezug auf K_0 linear unabhängigen[6]) unter ihnen gleich dem Range[7]) der Matrix M, deren Zeilen aus der Zeile

$$\left(\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_k} g_1}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_k^{\nu_k}} \cdots \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_k} g_p}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_k^{\nu_k}}\right)$$

entstehen, indem $\nu_1, \ldots \nu_k$ alle Lösungen von $\nu_1 + \ldots + \nu_k < p$ in ganzen Zahlen $\geqq 0$ durchlaufen.

Beweis. Es seien $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$ neue Unbestimmte; es bedeute Π die Operation

$$\Pi = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + x_{k+1} \frac{\partial}{\partial x_k} + \ldots.$$

---

[6]) Lineare Unabhängigkeit in bezug auf den Körper der Koeffizienten und lineare Unabhängigkeit in bezug auf den Körper aller Zahlen besagen dasselbe.

[7]) Hierunter ist der größte Grad (= Reihenanzahl) der nicht identisch verschwindenden Unterdeterminanten von M resp. die Zahl 0 zu verstehen.

Dann ist die Anzahl der linear unabhängigen Polynome gleich dem Range der Ostrowskischen[8]) Determinante

$$\Omega = |\Pi^{\varkappa} g_\lambda| \text{ [9])} \quad (\varkappa = 0, \ldots, p-1;\ \lambda = 1, \ldots, p).$$

In der Entwicklung einer nicht verschwindenden Unterdeterminante von Ω (wenn es solche gibt) nach Potenzprodukten von $x_2, x_3, \ldots$ treten aber als Koeffizienten die Unterdeterminanten von M auf. Der Rang von M ist daher mindestens gleich der Anzahl p' der linear unabhängigen Polynome.

Ist nun $p' < p$, so seien $\varkappa_0, \ldots, \varkappa_{p'}$ irgend $p'+1$ verschiedene Zahlen der Reihe $1, \ldots, p$. Dann besteht eine Gleichung $\sum_{\mu=0}^{p'} c_\mu g_{\varkappa_\mu} = 0$ mit konstanten Zahlen $c_0, \ldots, c_{p'}$, die nicht sämtlich 0 sind. Folglich ist auch

$$\sum_{\mu=0}^{p'} c_\mu \frac{\partial^{r_1 + \cdots + r_k} g_{\varkappa_\mu}}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_k^{r_k}} = 0;$$

so daß M vom Range $\leqq p'$, also genau vom Range p' ist.

Hilfssatz 4. Es seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ k algebraische Zahlen der Grade $h_1, \ldots, h_k$; es sei $\max(h_1, \ldots, h_k) = h$. Es gibt zwei positive nur von ξ, ϑ, k abhängige Zahlen c_{13}, c_{14} von folgender Eigenschaft: Ist

$$(19) \qquad \log H(\zeta_\nu) > c_{13} h r \prod_{\beta=\nu+1}^{k} r_\beta^{2^{\beta-\nu-1}} \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \text{ [10])},$$

so existieren $k-1$ Zahlen

$$(20) \qquad \varrho_\nu < c_{14} r_{\nu+1} \prod_{\beta=\nu+2}^{k} r_\beta^{2^{\beta-\nu-2}} \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1) \text{ [11])}$$

derart, daß

$$\left(\frac{\partial^{\varrho_1 + \cdots + \varrho_{k-1}} R(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1^{\varrho_1} \ldots \partial x_{k-1}^{\varrho_{k-1}}} \right)_{x_1 = \zeta_1, \ldots, x_k = \zeta_k} \neq 0$$

ist. Eo ipso ist dann $\varrho_\nu \leqq m_\nu + r_\nu$.

---

8) A. Ostrowski, Über ein Analogon der Wronskischen Determinante bei Funktionen mehrerer Veränderlicher, Math. Zeitschr. 4 (1919), S. 223–230.

9) $\Pi^1, \Pi^2, \ldots$ bedeuten die Iterationen von Π; $\Pi^0 g$ ist g selbst.

10) Für $\nu = k$ bedeutet $\prod_{\beta=\nu+1}^{k}$ die Zahl 1.

11) Für $\nu = k-1$ bedeutet $\prod_{\beta=\nu+2}^{k}$ die Zahl 1.

Beweis. Ich setze für das Polynom R des Hilfssatzes 1

$$R(x_1,\ldots,x_k)=\sum_{r=0}^{m_k+r_k} S_r^{[1]}(x_1,\ldots,x_{k-1})\cdot x_k^r.$$

Von den m_k+r_k+1 Polynomen $S_r^{[1]}$ seien t_k+1 linear unabhängig, etwa $S_{r_0}^{[1]},\ldots,S_{r_{t_k}}^{[1]}$. R ist nicht identisch 0; also

$$(21)\qquad 0\leqq t_k\leqq m_k+r_k.$$

Nun gibt es t_k+1 Polynome $\varphi_\lambda^{[1]}(x_k)$ mit Koeffizienten aus K_0, von denen keines identisch verschwindet, so daß

$$(22)\qquad \Delta^{[0]}=R(x_1,\ldots,x_k)=\sum_{\lambda=0}^{t_k} S_{r_\lambda}^{[1]}(x_1,\ldots,x_{k-1})\,\varphi_\lambda^{[1]}(x_k)$$

ist. Dann ist auch

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}}R(x_1,\ldots,x_k)}{\alpha_1!\ldots\alpha_{k-1}!\,\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_{k-1}^{\alpha_{k-1}}}=\sum_{\lambda=0}^{t_k}\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}}S_{r_\lambda}^{[1]}(x_1,\ldots,x_{k-1})}{\alpha_1!\ldots\alpha_{k-1}!\,\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_{k-1}^{\alpha_{k-1}}}\,\varphi_\lambda^{[1]}(x_k).$$

Nach Hilfssatz 3 existieren t_k+1 Lösungen $\alpha_1^{(\mu)},\ldots,\alpha_{k-1}^{(\mu)}$ $(\mu=0,\ldots,t_k)$ von $\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}\leqq t_k$ in ganzen Zahlen $\geqq 0$ derart, daß die Determinante

$$\Delta^{[1]}=\left|\frac{\partial^{\alpha_1^{(\mu)}+\cdots+\alpha_{k-1}^{(\mu)}}S_{r_\lambda}^{[1]}}{\alpha_1^{(\mu)}!\ldots\alpha_{k-1}^{(\mu)}!\,\partial x_1^{\alpha_1^{(\mu)}}\ldots\partial x_{k-1}^{\alpha_{k-1}^{(\mu)}}}\right|\qquad(\mu=0,\ldots,t_k;\ \lambda=0,\ldots,t_k)$$

nicht identisch 0 ist. Die Unterdeterminanten der Elemente in der ersten Spalte von $\Delta^{[1]}$ nenne ich $\Delta_\mu^{[1]}(\mu=0,\ldots,t_k)$; dann ist

$$\sum_{\mu=0}^{t_k}\Delta_\mu^{[1]}\frac{\partial^{\alpha_1^{(\mu)}+\cdots+\alpha_{k-1}^{(\mu)}}R}{\alpha_1^{(\mu)}!\ldots\alpha_{k-1}^{(\mu)}!\,\partial x_1^{\alpha_1^{(\mu)}}\ldots\partial x_{k-1}^{\alpha_{k-1}^{(\mu)}}}=\Delta^{[1]}(x_1,\ldots,x_{k-1})\,\varphi_0^{[1]}(x_k).$$

Das Polynom $\Delta^{[1]}$ ist vom Grade

$$(t_k+1)(m_\nu+r_\nu)\leqq(m_k+r_k+1)(m_\nu+r_\nu)$$

in x_ν $(\nu=1,\ldots,k-1)$; jeder seiner Koeffizienten ist ganz, liegt in K_0, und genügt wegen (3) der Ungleichung

$$\boxed{\Delta^{[1]}}<(t_k+1)!\,c_1^{r(t_k+1)}2^{(t_k+1)\sum_{\nu=1}^{k-1}(m_\nu+r_\nu)}\{(m_1+r_1+1)\ldots(m_{k-1}+r_{k-1}+1)\}^{t_k};$$

wegen (1), (6), (21) folgt daraus

$$(23)\qquad \begin{aligned}\boxed{\Delta^{[1]}}&<c_{15}^{rr_k}\{(m_1+r_1+1)\ldots(m_k+r_k+1)\}^{t_k}\\&=c_{15}^{rr_k}\{(d+\vartheta)\,r_1\ldots r_k\}^{t_k}<c_{16}^{rr_k}.\end{aligned}$$

Nun setze man

$$\Delta^{[1]}(x_1,\dots,x_{k-1}) = \sum_{\nu=0}^{(t_k+1)(m_{k-1}+r_{k-1})} S_\nu^{[2]}(x_1,\dots,x_{k-2})\cdot x_{k-1}^\nu.$$

Von den $(t_k+1)(m_{k-1}+r_{k-1})+1$ Polynomen $S_\nu^{[2]}(x_1,\dots x_{k-2})$ seien $t_{k-1}+1$ linear unabhängig, etwa $S_{\nu_0}^{[2]},\dots,S_{\nu_{t_{k-1}}}^{[2]}$.

$\Delta^{[1]}$ ist nicht identisch 0; also gilt wegen (21)

$$(24)\qquad 0 \leqq t_{k-1} \leqq (t_k+1)(m_{k-1}+r_{k-1}) \leqq (m_k+r_k+1)(m_{k-1}+r_{k-1}).$$

Es existieren $t_{k-1}+1$ Polynome $\varphi_\lambda^{[2]}(x_{k-1})$ mit Koeffizienten aus K_0, von denen keines identisch 0 ist, so daß

$$(25)\qquad \Delta^{[1]}(x_1,\dots,x_{k-1}) = \sum_{\lambda=0}^{t_{k-1}} S_{\nu_\lambda}^{[2]}(x_1,\dots,x_{k-2})\,\varphi_\lambda^{[2]}(x_{k-1})$$

gilt. Nach Hilfssatz 3 gibt es $t_{k-1}+1$ Lösungen $\beta_1^{(\mu)},\dots,\beta_{k-2}^{(\mu)}$ $(\mu=0,\dots,t_{k-1})$ von $\beta_1+\dots+\beta_{k-2}\leqq t_{k-1}$ in ganzen Zahlen $\geqq 0$, so daß die Determinante

$$\Delta^{[2]} = \left| \frac{\partial^{\beta_1^{(\mu)}+\dots+\beta_{k-2}^{(\mu)}} S_{\nu_\lambda}^{[2]}}{\beta_1^{(\mu)}!\dots\beta_{k-2}^{(\mu)}!\,\partial x_1^{\beta_1^{(\mu)}}\dots\partial x_{k-2}^{\beta_{k-2}^{(\mu)}}} \right| \qquad (\mu=0,\dots,t_{k-1};\ \lambda=0,\dots,t_{k-1})$$

nicht identisch verschwindet. Sind $\Delta_\mu^{[2]}$ $(\mu=0,\dots,t_{k-1})$ die Unterdeterminanten der Elemente in der ersten Spalte von $\Delta^{[2]}$, so ist

$$\sum_{\mu=0}^{t_{k-1}} \Delta_\mu^{[2]} \frac{\partial^{\beta_1^{(\mu)}+\dots+\beta_{k-2}^{(\mu)}}\Delta^{[1]}}{\beta_1^{(\mu)}!\dots\beta_{k-2}^{(\mu)}!\,\partial x_1^{\beta_1^{(\mu)}}\dots\partial x_{k-2}^{\beta_{k-2}^{(\mu)}}} = \Delta^{[2]}(x_1,\dots,x_{k-2})\,\varphi_0^{[2]}(x_{k-1}).$$

Das Polynom $\Delta^{[2]}$ ist vom Grade

$$(t_{k-1}+1)(t_k+1)(m_\nu+r_\nu) \leqq (m_{k-1}+r_{k-1}+1)(m_k+r_k+1)^2(m_\nu+r_\nu)$$

in x_ν $(\nu=1,\dots,k-2)$. Seine Koeffizienten sind ganze Zahlen aus K_0, für welche nach (23) und (24) die Ungleichung

$$\boxed{\Delta^{[2]}} < (t_{k-1}+1)!\, c_{16}^{r r_k (t_{k-1}+1)}\, 2^{(t_{k-1}+1)\sum_{\nu=1}^{k-2}(m_\nu+r_\nu)}$$
$$\times \{(t_k+1)^{k-2}(m_1+r_1+1)\dots(m_{k-2}+r_{k-2}+1)\}^{t_{k-1}}$$
$$< c_{17}^{r r_k^2 r_{k-1}}\ \{(t_k+1)^{k-2}(m_1+r_1+1)\ ..(m_k+r_k+1)\}^{t_{k-1}} < c_{18}^{r r_k^2 r_{k-1}}$$

gilt.

Dieses Eliminationsverfahren setze man nun fort, indem man entsprechende Determinanten $\Delta^{[\nu]}(x_1,\dots,x_{k-\nu})$, Polynome $\varphi_\lambda^{[\nu]}(x_{k-\nu+1})$, Zahlen $t_{k-\nu+1}$ für $\nu=3,\dots,k-1$ einführt. Zuletzt erhält man eine Gleichung

$$(26)\qquad \sum_{\mu=0}^{t_2} \Delta_\mu^{[k-1]} \frac{\partial^{\sigma_1^{(\mu)}}\Delta^{[k-2]}(x_1,x_2)}{\sigma_1^{(\mu)}!\,\partial x_1^{\sigma_1^{(\mu)}}} = \Delta^{[k-1]}(x_1)\,\varphi_0^{[k-1]}(x_2)$$

mit $\varrho_1^{(\mu)} \leqq t_2 \leqq (m_2 + r_2) \prod_{\nu=3}^{k} (m_\nu + r_\nu + 1)^{2^{\nu-3}}$, wo $\Delta^{[k-1]}(x_1)$ ein Polynom des Grades

$$\begin{aligned} &(t_2+1)(t_3+1)\ldots(t_k+1)(m_1+r_1) \\ &\leqq (m_2+r_2+1)^{2^0}(m_3+r_3+1)^{2^1}\ldots(m_k+r_k+1)^{2^{k-2}}(m_1+r_1) \end{aligned}$$

in x_1 allein bedeutet. Alle Polynome $\Delta^{[k-\nu]}$ $(\nu = 1, \ldots k)$ haben ganze Koeffizienten aus K_0 und genügen einer Ungleichung

$$(27) \qquad 0 < \overline{|\Delta^{[k-\nu]}|} < c_{19}^{\,r_\nu \prod\limits_{\beta=\nu+1}^{k} r_\beta^{2^{\beta-\nu-1}}} \quad {}^{12})$$

Ich drücke jetzt $\Delta^{[k-1]}$ mit Hilfe von (26) und der analogen vorhergehenden Gleichungen sukzessive durch $\Delta^{[k-2]}, \Delta^{[k-3]}, \ldots, \Delta^{[1]}, \Delta^{[0]} = R$ aus; dann ergibt sich eine Identität der Form

$$(28) \quad \begin{aligned} \sum_\mu C_\mu(x_1, \ldots, x_k) \frac{\partial^{\varrho_1^{(\mu)}+\ldots+\varrho_{k-1}^{(\mu)}} R(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1^{\varrho_1^{(\mu)}} \ldots \partial x_{k-1}^{\varrho_{k-1}^{(\mu)}}} \\ = \Delta^{[k-1]}(x_1)\varphi_0^{[k-1]}(x_2)\varphi_0^{[k-2]}(x_3)\ldots\varphi_0^{[1]}(x_k), \end{aligned}$$

wo die C_μ gewisse Polynome bedeuten und über alle Kombinationen $\varrho_1^{(\mu)}, \ldots, \varrho_{k-1}^{(\mu)}$ mit $0 \leqq \varrho_\nu^{(\mu)} \leqq t_{\nu+1} + t_{\nu+2} + \ldots + t_k$ $(\nu = 1, \ldots, k-1)$ zu summieren ist. Wegen

$$t_\lambda \leqq (m_\lambda + r_\lambda) \prod_{\nu=\lambda+1}^{k} (m_\nu + r_\nu + 1)^{2^{\nu-\lambda-1}}$$

ist dabei

$$\varrho_\nu^{(\mu)} \leqq \sum_{\lambda=\nu+1}^{k} \left\{ (m_\lambda + r_\lambda) \prod_{\beta=\lambda+1}^{k} (m_\beta + r_\beta + 1)^{2^{\beta-\lambda-1}} \right\} < c_{24}\, r_{\nu+1} \prod_{\beta=\nu+2}^{k} r_\beta^{2^{\beta-\nu-2}}.$$

Nun bedeute $\chi_\nu(z) = l_\nu z^{h_\nu} + \ldots = 0$ $(l_\nu > 0)$ die irreduzible Gleichung h_ν-ten Grades für ζ_ν $(\nu = 1, \ldots, k)$, deren Koeffizienten teilerfremde ganze rationale Zahlen sind. Dann ist

$$\max_{\lambda=0,\ldots h_\nu} \left\{ l_\nu \binom{h_\nu}{\lambda} \overline{|\zeta_\nu|}^{\lambda} \right\} \geqq H(\zeta_\nu),$$

also, wenn $\max(1, \overline{|\zeta_\nu|}) = Z$ gesetzt wird,

$$(29) \qquad H(\zeta_\nu) \leqq l_\nu (2\,Z)^h.$$

Die Koeffizienten von $\Delta^{[k-\nu]}$ sind ganze Zahlen aus K_0. Das Produkt aller n_0 zu $\Delta^{[k-\nu]}$ konjugierten Polynome sei $N(\Delta^{[k-\nu]}) = D_\nu(x_1, \ldots, x_\nu)$; dann ist jeder Koeffizient von D_ν ganz rational und nach (27) absolut

---

^{12}) Für $\nu = k$ ist das wieder cum grano salis zu verstehen.

$$< c_{19}^{n_0 r \prod_{\beta=\nu+1}^{k} r_\beta^{2^{\beta-\nu-1}}} \overline{\left|\left\{(1+x_1)^{m_1+r_1}(1+x_2)^{m_2+r_2}\dots(1+x_\nu)^{m_\nu+r_\nu}\right\}^{(t_{\nu+1}+1)\dots(t_k+1)\,n_0}\right|}$$

$$< c_{19}^{n_0 r \prod_{\beta=\nu+1}^{k} r_\beta^{2^{\beta-\nu-1}}} \, 2^{\sum_{\alpha=1}^{\nu}(m_\alpha+r_\alpha)(t_{\nu+1}+1)\dots(t_k+1)\,n_0} < c_{20}^{r \prod_{\beta=\nu+1}^{k} r_\beta^{2^{\beta-\nu-1}}} = M.$$

Wäre nun $\Delta^{[k-\nu]}(x_1, \dots, x_\nu)$ identisch 0 für $x_\nu = \zeta_\nu$, so wäre das ganzrationalzahlige Polynom $D_\nu(x_1, \dots, x_\nu)$ teilbar durch das primitive irreduzible Polynom $\chi_\nu(x_\nu)$ und der Quotient hätte nach dem Gaußschen Satze wieder ganze rationale Koeffizienten. Jeder Koeffizient $g \neq 0$ in dem Faktor der höchsten Potenz von x_ν in D_ν wäre also insbesondere durch l_ν teilbar, also wäre

$$l_\nu \leqq |g|.$$

D_ν hat den Grad $\delta_\nu = n_0(t_{\nu+1}+1)\dots(t_k+1)(m_\nu+r_\nu)$ in x_ν. Aus $D_\nu(x_1, \dots, x_{\nu-1}, \zeta_\nu) = 0$ folgte dann

$$Z \leqq \delta_\nu \frac{M}{|g|} \leqq \delta_\nu \frac{M}{l_\nu},$$

also wegen (29)

$$H(\zeta_\nu) \leqq l_\nu\left(2\delta_\nu \frac{M}{l_\nu}\right)^h \leqq (2\delta_\nu M)^h < c_{21}^{hr \prod_{\beta=\nu+1}^{k} r_\beta^{2^{\beta-\nu-1}}},$$

gegen (19) für hinreichend großes $c_{13} = c_{13}(\xi, \vartheta, k)$. Demnach ist $\Delta^{[k-\nu]}(x_1, \dots, x_\nu)$ $(\nu = 1, \dots, k)$ unter der Annahme (19) für $x_\nu = \zeta_\nu$ nicht identisch 0. Wegen (22), (25) und der analogen Gleichungen für beliebiges ν ist also bei jedem $\nu > 1$ eine der Zahlen $\varphi_\lambda^{[k-\nu+1]}(\zeta_\nu)$ $(\lambda = 0, \dots, t_\nu)$ von 0 verschieden. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $\varphi_0^{[k-\nu+1]}(\zeta_\nu)$ diese Eigenschaft hat. Dann ist also die rechte Seite von (28) an der Stelle $x_1 = \zeta_1, \dots, x_k = \zeta_k$ nicht 0. Mindestens ein Summand der linken Seite von (28) ist also dort ebenfalls $\neq 0$; und folglich gibt es $k-1$ ganze Zahlen $\varrho_\nu^{(\mu)} = \varrho_\nu \geqq 0$ $(\nu = 1, \dots, k-1)$, die den Ungleichungen (20) genügen, so daß

$$\left(\frac{\partial^{\varrho_1+\dots+\varrho_{k-1}} R(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1^{\varrho_1}\dots\partial x_{k-1}^{\varrho_{k-1}}}\right)_{x_1=\zeta_1, \dots, x_k=\zeta_k} \neq 0$$

ist.

Fortan haben $\zeta_1, \dots, \zeta_k$, $\varrho_1, \dots, \varrho_{k-1}$ die Bedeutung des Hilfssatzes 4. Der Symmetrie halber setze ich noch $\varrho_k = 0$. Ferner sei wie früher

$$\chi_\nu(z) = l_\nu z^{h_\nu} + \dots = 0 \qquad (l_\nu > 0)$$

die Gleichung für ζ_ν.

Hilfssatz 5. Der Körper $K_0(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ sei vom Grade h', so daß also $1 \leqq h' \leqq n_0 h_1 \dots h_k$ ist. Bedeuten $R_{e_1\dots e_k}^{(\lambda)}(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ die h' zu $R_{e_1\dots e_k}(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ konjugierten Zahlen $(\lambda = 1, \dots, h')$, so ist

$$(30) \qquad \prod_{\nu=1}^{k} l_\nu^{\frac{h'}{h_\nu}(m_\nu+r_\nu)} \left|\prod_{\lambda=1}^{h'} R_{e_1\dots e_k}^{(\lambda)}(\zeta_1, \dots, \zeta_k)\right| \geqq 1.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 4 ist die algebraische Zahl $R_{\varrho_1 \ldots \varrho_k}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \neq 0$. Das Polynom $R_{\varrho_1 \ldots \varrho_k}(x_1, \ldots, x_k)$ hat ganze Koeffizienten aus K_0 und ist in x_ν vom Grade $m_\nu + r_\nu - \varrho_\nu \geqq 0$. Entwickelt man $\prod_{\lambda=1}^{h'} R^{(\lambda)}_{\varrho_1 \ldots \varrho_k}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$, ohne die Gleichungen für $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ zu benutzen, so tritt eine feste Konjugierte von ζ_ν höchstens in der $\frac{h'}{h_\nu}(m_\nu + r_\nu - \varrho_\nu)$-ten Potenz auf. Nach dem Satze von Kronecker ist daher die Zahl

$$\prod_{\nu=1}^{k} l_\nu^{\frac{h'}{h_\nu}(m_\nu + r_\nu - \varrho_\nu)} \prod_{\lambda=1}^{h'} R^{(\lambda)}_{\varrho_1 \ldots \varrho_k}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$$

ganz, also a fortiori die linke Seite von (30); da diese aber andererseits rational und > 0 ist, so ist sie $\geqq 1$.

Fortan mache ich die Voraussetzung

$$r_\nu \geqq c_{14}\, r_{\nu+1} \prod_{\beta=\nu+2}^{k} r_\beta^{2^{\beta-\nu-2}} \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1), \tag{31}$$

wo c_{14} die Konstante aus Hilfssatz 4 bedeutet, so daß also nach (20) $r_\nu > \varrho_\nu$ ist. Ferner setze ich noch zur Abkürzung

$$H(\zeta_\nu) = H_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, k).$$

Hilfssatz 6. Es seien die Ungleichungen (19) und (31) erfüllt. Dann gibt es ein positives $c_{22} = c_{22}(\xi, \vartheta, k)$ derart, daß eine der k Zahlen

$$E_\lambda = c_{22}^{h' r} \, |\xi - \zeta_\lambda|^{r_\lambda - \varrho_\lambda} \prod_{\nu=1}^{k} H_\nu^{\frac{h'}{h_\nu}(m_\nu + r_\nu)} \qquad (\lambda = 1, \ldots, k)$$

größer als 1 ist.

Beweis. Nach (15) und Hilfssatz 5 ist, wenn $R^{(1)}_{\varrho_1 \ldots \varrho_k}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = R_{\varrho_1 \ldots \varrho_k}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ gesetzt wird,

$$\prod_{\nu=1}^{k} l_\nu^{\frac{h'}{h_\nu}(m_\nu + r_\nu)} \left| \sum_{\nu=1}^{k} (\zeta_\nu - \xi)^{r_\nu - \varrho_\nu} F^{(\nu)}_{\varrho_1 \ldots \varrho_k}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \right| \left| \prod_{\lambda=2}^{h'} R^{(\lambda)}_{\varrho_1 \ldots \varrho_k}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \right| \geqq 1.$$

Wegen $\varrho_\nu < r_\nu$ darf ich auf die linke Seite die Ungleichungen (16) und (17) anwenden; dann ist, wenn die Konjugierten zu ζ_ν mit $\zeta_\nu^{(\mu)}$ $(\mu = 1, \ldots, h_\nu)$ bezeichnet werden,

$$\prod_{\nu=1}^{k} l_\nu^{\frac{h'}{h_\nu}(m_\nu + r_\nu)} c_9^r c_{10}^{(h'-1) r} \left\{ \prod_{\nu=1}^{k} \prod_{\mu=2}^{h_\nu} (1 + |\zeta_\nu^{(\mu)}|)^{\frac{h'}{h_\nu}(m_\nu + r_\nu)} \right\} \left\{ \prod_{\nu=1}^{k} (1 + |\zeta_\nu|)^{\left(\frac{h'}{h_\nu} - 1\right)(m_\nu + r_\nu)} \right\}$$

$$\times \left\{ \sum_{\nu=1}^{k} |\zeta_\nu - \xi|^{r_\nu - \varrho_\nu} \prod_{\beta=1}^{k} (1 + |\zeta_\beta|)^{m_\beta + r_\beta} \right\} > 1,$$

$$c_{23}^{h' r} \prod_{\nu=1}^{k} \left\{ l_\nu^{\frac{h'}{h_\nu}(m_\nu + r_\nu)} \prod_{\mu=1}^{h_\nu} (1 + |\zeta_\nu^{(\mu)}|)^{\frac{h'}{h_\nu}(m_\nu + r_\nu)} \right\} \sum_{\nu=1}^{k} |\zeta_\nu - \xi|^{r_\nu - \varrho_\nu} > 1.$$

Folglich[18]) ist

$$c_{23}^{h' r}\prod_{\nu=1}^{k}(6^{h_\nu} H_\nu)^{\frac{h'}{h_\nu}(m_\nu+r_\nu)}\sum_{\nu=1}^{k}|\zeta_\nu-\xi|^{r_\nu-\varrho_\nu}>1,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{k}E_\lambda = c_{23}^{h' r}\prod_{\nu=1}^{k}H_\nu^{\frac{h'}{h_\nu}(m_\nu+r_\nu)}\sum_{\lambda=1}^{k}|\xi-\zeta_\lambda|^{r_\lambda-\varrho_\lambda}>k,$$

q. e. d.

§ 2.

Satz 1. Es sei ξ eine algebraische Zahl des Grades $n \geqq 2$; es sei P ein algebraischer Zahlkörper, in bezug auf welchen ξ vom Grade $d \geqq 2$ ist; es sei $\alpha > \min\limits_{k=1,\dots d} k\sqrt[k]{d}$. Man ordne die Lösungen $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \dots$ der Ungleichung

$$(33) \qquad |\xi-\zeta| \leqq \frac{1}{H(\zeta)^\alpha} \qquad (\zeta \text{ primitive Zahl aus } \mathsf{P})$$

nach wachsenden Höhen $H(\zeta)$:

$$H(\zeta^{(1)}) = H^{(1)} \leqq H(\zeta^{(2)}) = H^{(2)} \leqq \dots .$$

Dann hat diese Ungleichung entweder nur endlich viele Lösungen oder es ist

$$(34) \qquad \varlimsup_{\nu\to\infty}\frac{\log H^{(\nu+1)}}{\log H^{(\nu)}} = \infty .$$

Satz 2. Es sei ξ eine algebraische Zahl des Grades $n \geqq 2$; es sei h eine natürliche Zahl und $\alpha > \min\limits_{k=1,\dots,n} k h^{k-1}\sqrt[k]{n}$. Sind dann $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \dots$ die nach wachsenden Höhen $H^{(1)}, H^{(2)}, \dots$ geordneten Lösungen von

---

18) Von den h_ν Zahlen $\zeta_\nu^{(1)}, \dots \zeta_\nu^{(h_\nu)}$ seien a absolut > 2, b absolut $\leqq 2$ $(a+b=h_\nu)$; ich nenne sie $\alpha_1, \dots, \alpha_a$, $\beta_1, \dots, \beta_b$ (a oder b können auch 0 sein). Bedeutet α eine der Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_a$, so ist für $|z|=1$

$$\frac{1+|\alpha|}{|z-\alpha|} \leqq \frac{|\alpha|+1}{|\alpha|-|z|} = 1+\frac{2}{|\alpha|-1} < 3;$$

ferner ist bei Integration über den Einheitskreis

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{(z-\beta_1)\dots(z-\beta_b)}{z^{b+1}}\,dz = 1,$$

also für einen Punkt z_0 dieses Kreises $|(z_0-\beta_1)\dots(z_0-\beta_b)| \geqq 1$; wegen $1+|\beta| \leqq 3$ folgt daher

$$32) \qquad \prod_{\mu=1}^{h_\nu}(1+|\zeta_\nu^{(\mu)}|) = \prod_{\kappa=1}^{a}(1+|\alpha_\kappa|)\prod_{\lambda=1}^{b}(1+|\beta_\lambda|) \leqq 3^a\prod_{\kappa=1}^{a}|z_0-\alpha_\kappa|\cdot 3^b$$

$$\leqq 3^{h_\nu}\prod_{\mu=1}^{h_\nu}|z_0-\zeta_\nu^{(\mu)}| \leqq 3^{h_\nu}(h_\nu+1)\frac{H(\zeta_\nu)}{l_\nu} \leqq 6^{h_\nu}\frac{H_\nu}{l_\nu}.$$

$$(35) \qquad |\xi - \zeta| \leqq \frac{1}{H(\zeta)^a} \qquad (\zeta \text{ vom Grade } \leqq h),$$

so ist deren Anzahl entweder endlich oder es gilt (34).

Beweis zu Satz 1 und 2. Es bedeute h zugleich den Grad von P. Es existiert eine natürliche Zahl $c_{24} = c_{24}(\xi)$, so daß $c_{24}\xi$ ganz ist. Wegen $\frac{H(\zeta)}{c_{24}^h} \leqq H(c_{24}\zeta) \leqq c_{24}^h H(\zeta)$ genügt es offenbar, die Behauptung für die ganze Zahl $c_{24}\xi$ zu beweisen. Ich darf mich beim Beweise also auf ganze ξ beschränken.

Es sei $\alpha = k\sqrt[k]{d} + \theta$ bei Satz 1, resp. $\alpha = kh^{k-1}\sqrt[k]{n} + \theta$ bei Satz 2, wo k eine Zahl der Reihe $1, \ldots, d$ resp. $1, \ldots, n$ bedeutet und $\theta > 0$ ist. Es genügt, $\theta < 1$ anzunehmen. Es sei N eine ganze rationale Zahl $> \frac{4h^{k-1}k}{\theta}$; dann ist

$$(36) \qquad \alpha > k\sqrt[k]{d} + \frac{2k}{N} + \frac{\theta}{2} \qquad \text{resp.} \qquad \alpha > h^{k-1}\left(k\sqrt[k]{d} + \frac{2k}{N}\right) + \frac{\theta}{2}.$$

Es sei $r_k = N$ und $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$ monoton fallend $\geqq N$, sonst für den Augenblick noch beliebig. Es sei m_ν die kleinste natürliche Zahl, für welche die Ungleichung

$$(37) \qquad \sqrt[k]{d} + \frac{1}{N} \leqq \frac{m_\nu + r_\nu + 1}{r_\nu} < \sqrt[k]{d} + \frac{2}{N} \qquad (\nu = 1, \ldots, k)$$

gilt; hierbei bedeute d im Falle des Satzes 2 die Zahl n. Dann ist nach (37)

$$\left(\sqrt[k]{d} + \frac{2}{N}\right)^k - d > \prod_{\nu=1}^{k} \frac{m_\nu + r_\nu + 1}{r_\nu} - d = \vartheta \geqq \left(\sqrt[k]{d} + \frac{1}{N}\right)^k - d > 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{k} \frac{m_\nu + r_\nu + 1}{r_\nu} < k\sqrt[k]{d} + \frac{2k}{N},$$

also nach (36)

$$(38) \qquad \sum_{\nu=1}^{k} \frac{m_\nu + r_\nu + 1}{r_\nu} + \frac{\theta}{4} < \alpha - \frac{\theta}{4} < \alpha(1-\delta)^2$$

resp.

$$(39) \qquad h^{k-1} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{m_\nu + r_\nu + 1}{r_\nu} + \frac{\theta}{4} < \alpha - \frac{\theta}{4} < \alpha(1-\delta)^2,$$

wo $\frac{\theta}{8\alpha} = \delta$ gesetzt ist.

Das $c_{22} = c_{22}(\xi, \vartheta, k)$ des Hilfssatzes 6 kann, wie ein Blick auf die Beweise zeigt, offenbar beibehalten werden, wenn ϑ durch eine größere Zahl < 1 ersetzt wird. Wegen $\vartheta \geqq \left(\sqrt[k]{d} + \frac{1}{N}\right)^k - d$ kann daher c_{22} von

r_ν $(\nu = 1, \ldots k-1)$ unabhängig und nur von ξ, θ, h, k abhängig gewählt werden.

(33) resp. (35) möge nun unendlich viele Lösungen besitzen. Es seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ von den Graden $h_1, \ldots, h_k$ k Lösungen derart, daß

$$c_{22}^{\frac{4h^k}{\theta}} < H_1 < H_2 < \ldots < H_k \tag{40}$$

ist, wo zur Abkürzung $H(\zeta_\nu) = H_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ gesetzt ist. Ich setze nun

$$r_\nu = \left[r_k \frac{\log H_k}{\log H_\nu} \right] \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1); \tag{41}$$

dann sind also r_ν und m_ν und folglich auch ϑ festgelegt, also auch die Konstanten c_{13}, c_{14} des Hilfssatzes 4; und ferner ist

$$\frac{\log H_\nu}{\log H_k} \leqq \frac{r_k}{r_\nu}.$$

Jetzt nehme ich per absurdum an, die linke Seite von (34) $\overline{\lim\limits_{\nu \to \infty}} \dfrac{\log H^{(\nu+1)}}{\log H^{(\nu)}}$ sei eine endliche Zahl. Dann existiert ein M derart, daß für alle $\nu > \nu_0$ die Ungleichung

$$\frac{\log H^{(\nu+1)}}{\log H^{(\nu)}} \leqq M \tag{42}$$

gilt. Bedeutet τ die größere der beiden Zahlen $c_{13} h r_k^{2^{k-1}}$ und $\dfrac{1+c_{14}}{\delta^2} r_k^{2^{k-2}-1}$, so seien die Höhen $H_1, \ldots, H_k$ so gewählt, daß sie außer (40) noch den k Ungleichungen

$$\log H_1 > (\tau M)^{4^k}, \tag{43}$$

$$\frac{1}{M} (\tau M)^{4^{k-\nu-2}} < \frac{\log H_{\nu+1}}{\log H_\nu} \leqq (\tau M)^{4^{k-\nu-2}} \qquad (\nu = 1, \ldots, k-2), \tag{44}$$

$$\tau < \frac{\log H_k}{\log H_{k-1}} \leqq \tau M \tag{45}$$

genügen; das ist wegen (42) möglich. Aus (44) und (45) folgt dann für $\lambda = 1, \ldots, k-2$

$$\frac{\log H_k}{\log H_\lambda} \leqq (\tau M)^{1+4^0+\ldots+4^{k-\lambda-2}} = (\tau M)^{1+\frac{4^{k-\lambda-1}-1}{3}} \leqq (\tau M)^{4^{k-\lambda-1}},$$

und dies ist auch richtig für $\lambda = k-1$. Daher ist für $\nu = 0, \ldots, k-3$

$$\prod_{\lambda=\nu+2}^{k} \left(\frac{\log H_k}{\log H_\lambda} \right)^{2^{\lambda-\nu-2}} \leqq \prod_{\lambda=\nu+2}^{k-1} (\tau M)^{2^{2k-\lambda-\nu-4}} \tag{46}$$

$$= (\tau M)^{2^{k-\nu-3}(2^{k-\nu-2}-1)} < (\tau M)^{4^{k-\nu-2}-1};$$

also wegen (44) für $\nu = 1, \ldots, k-3$

$$(47) \qquad \frac{\log H_{\nu+1}}{\log H_\nu} > \tau \prod_{\lambda=\nu+2}^{k} \left(\frac{\log H_k}{\log H_\lambda}\right)^{2^{\lambda-\nu-2}} \geqq \frac{1+c_{14}}{\delta^2} \prod_{\lambda=\nu+2}^{k} \left(r_k \frac{\log H_k}{\log H_\lambda}\right)^{2^{\lambda-\nu-2}};$$

und nach (44) und (45) gilt diese Formel auch für $\nu = k-2,\ k-1$, wenn im letzteren Fall Π durch 1 ersetzt wird. Mit Hilfe von (41) ergibt sich demnach

$$r_\nu + 1 > \frac{1+c_{14}}{\delta^2} r_{\nu+1} \prod_{\lambda=\nu+2}^{k} r_\lambda^{2^{\lambda-\nu-2}},$$

also auch

$$(48) \qquad c_{14} r_{\nu+1} \prod_{\beta=\nu+2}^{k} r_\beta^{2^{\beta-\nu-2}} < \delta^2 r_\nu < r_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1).$$

Ferner liefert (46) für $\nu = 0$

$$\tau \frac{\log H_k}{\log H_1} \prod_{\beta=2}^{k} \left(\frac{\log H_k}{\log H_\beta}\right)^{2^{\beta-2}} < \tau(\tau M)^{4^{k-2}} (\tau M)^{4^{k-2}-1} < (\tau M)^{4^k},$$

so daß nach (43)

$$\log H_1 > c_{13} h r_k \frac{\log H_k}{\log H_1} \prod_{\beta=2}^{k} \left(r_k \frac{\log H_k}{\log H_\beta}\right)^{2^{\beta-2}},$$

also a fortiori

$$(19) \qquad \log H_\nu > c_{13} h r \prod_{\beta=\nu+1}^{k} r_\beta^{2^{\beta-\nu-1}} \qquad (\nu = 1, \ldots, k)$$

gilt.

Es bedeute nun K_0 den Körper P, oder (bei Satz 2) den Körper der rationalen Zahlen Ω. Die Voraussetzungen (19) und (31) des Hilfssatzes 6 sind erfüllt, folglich ist in der Bezeichnung dieses Hilfssatzes für ein gewisses λ der Reihe $1, \ldots, k$

$$(49) \qquad \log E_\lambda > 0;$$

und hieraus wird ein Widerspruch folgen.

Aus (20) und (48) erhalte ich für $\nu = 1, \ldots, k-1$

$$(50) \qquad r_\nu - \varrho_\nu > (1-\delta^2) r_\nu,$$

und dies gilt wegen $\varrho_k = 0$ auch für $\nu = k$. Ferner ist nach (47)

$$\frac{\log H_\nu}{\log H_k} < \delta^2 \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1),$$

also nach (41)

$$(51) \qquad r_\nu > r_k \frac{\log H_k}{\log H_\nu} - 1 > \frac{r_k}{\delta^2} - 1 > \frac{1}{\delta^2} - 1.$$

Ich setze $g = h$ oder $= h_1 \ldots h_k \leqq h^k$, je nachdem Satz 1 oder 2 vorliegt; dann ist nach (38) resp. (39), (40) für $\lambda = 1, \ldots, k$

$$g \frac{\log c_{21}}{\log H_1} + g \sum_{\nu=1}^{k} \frac{m_\nu + r_\nu}{h_\nu r_\nu} < \alpha (1-\delta) r_\lambda (1-\delta) \frac{1}{r_\lambda},$$

also nach (50)

$$(52)\qquad g r \log c_{22} + g \sum_{\nu=1}^{k} \frac{m_\nu + r_\nu}{h_\nu} \frac{r \log H_1}{r_\nu} < \alpha (r_\lambda - \varrho_\lambda) \frac{1-\delta}{1+\delta} \frac{r \log H_1}{r_\lambda}.$$

Da nun nach (41) und (51) für $\nu = 1, \ldots, k-1$

$$(1-\delta^2) \log H_\nu \leqq (1-\delta^2) \frac{r_k \log H_k}{r_\nu} < (1-\delta^2)\left(1 + \frac{1}{r}\right) \frac{r \log H_1}{r_\nu} < \frac{r \log H_1}{r_\nu}$$

$$< \frac{1}{(1-\delta^2)\left(1 + \frac{1}{r_\nu}\right)} \frac{r \log H_1}{r_\nu} \leqq \frac{r_k \log H_k}{(1-\delta^2)(r_\nu + 1)} < \frac{\log H_\nu}{1-\delta^2}$$

und für $\nu = k$ ebenfalls

$$(1-\delta^2) \log H_k < (1-\delta^2)\left(1 + \frac{1}{r}\right) \frac{r \log H_1}{r_k} < \frac{r \log H_1}{r_k} \leqq \log H_k < \frac{\log H_k}{1-\delta^2}$$

ist, so folgt aus (52)

$$(53)\qquad g r \log c_{22} + g \sum_{\nu=1}^{k} \frac{m_\nu + r_\nu}{h_\nu} (1-\delta^2) \log H_\nu < \alpha (r_\lambda - \varrho_\lambda) \frac{\log H_1}{(1+\delta)^2}.$$

Der Körper $\mathrm{P}(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ resp. $\Omega(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ ist nun vom Grade $h' \leqq g$; wegen $0 < \delta < \frac{1}{2}$ ist

$$(1-\delta^2)(1+\delta)^2 > (1-\delta^2)(1+\delta) = 1 + \delta(1 - \delta - \delta^2) > 1;$$

ferner gilt (33) resp. (35). Daher liefert (53) für $\lambda = 1, \ldots, k$

$$h' r \log c_{22} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{h'}{h_\nu} (m_\nu + r_\nu) \log H_\nu < (r_\lambda - \varrho_\lambda) \log \frac{1}{|\xi - \zeta_\lambda|},$$

$$\log E_\lambda < 0,$$

gegen (49).

Zusatz. Es ist leicht zu zeigen, daß

$$\varliminf_{\nu \to \infty} \frac{\log H^{(\nu+1)}}{\log H^{(\nu)}} \geqq \frac{1}{h^*} \alpha - 1$$

ist, wo $h^* = 1$ bei Satz 1, $= h$ bei Satz 2 zu setzen ist. Gilt nämlich (33) resp. (35) für zwei Zahlen ζ_1, ζ_2 mit $H_1 \leqq H_2$, so folgt

$$(54)\qquad |\zeta_1 - \zeta_2| \leqq \frac{1}{H_1^\alpha} + \frac{1}{H_2^\alpha};$$

andererseits ist, wenn l_1, l_2 die frühere Bedeutung haben,

$$(55)\qquad (l_1 l_2)^{h^*} |N(\zeta_1 - \zeta_2)| \geqq 1,$$

wo die Norm in dem aus ζ_1, ζ_2 zusammengesetzten Körper genommen ist. Wegen (32) und (54) wird

$$|N(\zeta_1-\zeta_2)| \leqq \left(\frac{1}{H_1^{\alpha}}+\frac{1}{H_2^{\alpha}}\right)\prod_{\nu=1}^{h}(1+|\zeta_1^{(\nu)}|)^{h^*}\prod_{\nu=1}^{h}(1+|\zeta_2^{(\nu)}|)^{h^*}$$

$$< \frac{2}{H_1^{\alpha}}\, 6^{2hh^*}\left(\frac{H_1 H_2}{l_1 l_2}\right)^{h^*},$$

also nach (55)

$$\frac{H_1 H_2}{H_1^{\frac{\alpha}{h^*}}} > \frac{1}{2\cdot 6^{2h}} = c > 0,$$

$$\frac{\log H_2}{\log H_1} > \frac{\alpha}{h^*} - 1 + \frac{\log c}{\log H_1},$$

woraus die Behauptung folgt.

§ 3.

Hilfssatz 7. Es ist

$$\min_{k=1,\dots,d} k\sqrt[k]{d} < e\left(\log d + \frac{1}{2\log d}\right).$$

Beweis. Die Funktion $x d^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$ hat das Minimum $e\log d$ für $x=\log d$ und wächst monoton für $x>\log d$. Ich wähle für k die natürliche Zahl des Intervalls $\log d < x < \log d + 1$,

$$k = [\log d] + 1;$$

dann ist

$$k\sqrt[k]{d} < (1+\log d)\, e^{\frac{\log d}{1+\log d}} < e(1+\log d)\left(1-\frac{1}{1+\log d}+\frac{1}{2(1+\log d)^2}\right)$$

$$= e\left(\log d + \frac{1}{2(1+\log d)}\right) < e\left(\log d + \frac{1}{2\log d}\right).$$

Aus Satz 1 und Hilfssatz 7 folgt unmittelbar

Satz 3. Es sei ξ eine reelle algebraische Zahl vom Grade $n \geqq 2$; es sei $\alpha = e\left(\log n + \frac{1}{2\log n}\right)$ [14]). Die Lösungen der Ungleichung

$$(56) \qquad \left|\xi - \frac{x}{y}\right| \leqq \frac{1}{y^{\alpha}}$$

[14]) Daraus folgt $\alpha > 2$. Für $\alpha = 2$ gilt Satz 3 nicht; setzt man z. B. für quadratfreies $D>3$ $\xi=\sqrt{D}$ und bedeutet $\varepsilon>1$ die Grundeinheit von $K(\sqrt{D})$, so sind die ganzen rationalen Zahlen $x_\nu = \varepsilon^{2\nu}+\varepsilon^{-2\nu}$, $y_\nu = \frac{\varepsilon^{2\nu}-\varepsilon^{-2\nu}}{\sqrt{D}}$ $(\nu = 1, 2, \dots)$ Lösungen von $0 < \frac{x}{y} - \sqrt{D} = \frac{4}{y(x+y\sqrt{D})} < \frac{1}{y^2}$ und es ist $\lim_{\nu\to\infty}\frac{\log y_{\nu+1}}{\log y_\nu} = 1$.

in ganzen rationalen Zahlen x, y $(y > 0)$ seien x_ν, y_ν $(\nu = 1, 2, \ldots;$ $y_1 \leqq y_2 \leqq \ldots)$. Dann ist die Anzahl dieser Lösungen entweder endlich oder es ist

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{\log y_{\nu+1}}{\log y_\nu} = \infty.$$

Ferner ergibt sich

Satz 4. Es sei $U(x, y)$ ein homogenes in Ω irreduzibles Polynom n-ten Grades $(n > 2)$ mit rationalen Koeffizienten. Es bedeute $V(x, y)$ irgendein Polynom von der Dimension $\delta < n - \min\limits_{k=1,\ldots,n} k\sqrt[k]{n}$. Die Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$U(x, y) = V(x, y)$$

in ganzen rationalen Zahlen $x = x_\nu$, $y = y_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ seien nach wachsenden absoluten Beträgen der y geordnet:

$$|y_1| \leqq |y_2| \leqq \cdots$$

Dann ist deren Anzahl entweder endlich oder es ist

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{\log|y_{\nu+1}|}{\log|y_\nu|} = \infty.$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Lösungen $\frac{x}{y}$ von (56) für $y \geqq 2$ in der Entwicklung von ξ in einen Kettenbruch als Näherungswerte auftreten[15]).

---

[15]) Es seien $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$ zwei aufeinander folgende Näherungswerte, es sei $0 < Q \leqq y < Q'$ und etwa $\frac{P}{Q} < \frac{P'}{Q'}$. Dann folgt

I. aus $\frac{x}{y} < \frac{P}{Q}$ die Ungleichung $\left|\xi - \frac{x}{y}\right| > \left|\frac{P}{Q} - \frac{x}{y}\right| \geqq \frac{1}{Qy} \geqq \frac{1}{y^2}$,

II. aus $\frac{P}{Q} < \frac{x}{y} < \frac{P'}{Q'}$ die Ungleichung $\frac{1}{Qy} \leqq \frac{x}{y} - \frac{P}{Q} < \frac{P'}{Q'} - \frac{P}{Q} = \frac{1}{QQ'}$, also $Q' < y$,

III. aus $\frac{P'}{Q'} < \frac{x}{y}$ und $y^{\alpha-1} < Q'$ die Ungleichung $\left|\xi - \frac{x}{y}\right| > \frac{x}{y} - \frac{P'}{Q'} = \left(\frac{x}{y} - \frac{P}{Q}\right)$
$-\left(\frac{P'}{Q'} - \frac{P}{Q}\right) \geqq \frac{1}{Qy} - \frac{1}{QQ'} \geqq \frac{1}{y^2}\left(1 - \frac{1}{y^{\alpha-2}}\right) > \frac{1}{y^\alpha}$ wegen $y \geqq 2$, $\alpha > 3$,

IV. aus $\frac{P'}{Q'} < \frac{x}{y}$ und $y^{\alpha-1} \geqq Q'$ die Ungleichung $\left|\xi - \frac{x}{y}\right| > \frac{x}{y} - \frac{P'}{Q'} \geqq \frac{1}{Q'y} \geqq \frac{1}{y^\alpha}$;

folglich ist $\frac{x}{y} = \frac{P}{Q}$. Dasselbe ergibt sich aus der Annahme $\frac{P'}{Q'} < \frac{P}{Q}$.

Es gibt aber unendlich viele Näherungswerte in der Kettenbruchentwicklung, die keine Lösung von (56) liefern; es gilt nämlich folgender

Satz 5. Es seien $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots$ die Näherungswerte der Kettenbruchentwicklung einer reellen algebraischen Zahl ξ vom Grade $n \geqq 2$. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl m ein $\nu = \nu(m)$, so daß jede der Zahlen $\frac{P_\lambda}{Q_\lambda}$ für $\lambda = \nu + 1, \ldots, \nu + m$ der Ungleichung

$$\left|\xi - \frac{P_\lambda}{Q_\lambda}\right| > \frac{1}{Q_\lambda^\alpha} \qquad \left(\alpha = e\left(\log n + \frac{1}{2 \log n}\right)\right) \tag{57}$$

genügt. Es gibt also auch unendlich viele solcher ν; insbesondere gilt also (57) für unendlich viele λ.

Beweis. Bekanntlich ist für hinreichend großes λ

$$\left|\xi - \frac{P_\lambda}{Q_\lambda}\right| > \frac{1}{Q_\lambda^{n+1}},$$

also wegen

$$\left|\xi - \frac{P_\lambda}{Q_\lambda}\right| < \frac{1}{Q_\lambda Q_{\lambda+1}}$$

$$Q_{\lambda+1} < Q_\lambda^n. \tag{58}$$

Wäre nun Satz 5 falsch, so gäbe es ein m derart, daß unter irgend $2m$ konsekutiven Näherungsbrüchen $\frac{P_\lambda}{Q_\lambda}$ zwei Lösungen $\frac{P_\varrho}{Q_\varrho}, \frac{P_\sigma}{Q_\sigma}$ $(\varrho < \sigma)$ von

$$\left|\xi - \frac{P_\lambda}{Q_\lambda}\right| \leqq \frac{1}{Q_\lambda^\alpha}$$

vorhanden sind. Aus $0 < \sigma - \varrho < 2m$ folgte dann wegen (58)

$$1 < \frac{\log Q_\sigma}{\log Q_\varrho} < n^{2m}$$

im Widerspruch zu Satz 4.

Berlin, 31. Dezember 1920.

(Eingegangen am 2. 1. 1921)

Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu a^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$.

(2. Abhandlung.)

Von

Ljubomir Tschakaloff in Sofia.

In einer früheren, gleich betitelten Arbeit[1]) habe ich die Irrationalität der unendlichen Reihe

$$\Phi(x, a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu a^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \qquad (|a| > 1) \tag{I}$$

für beliebige von Null verschiedene rationale Werte von x bewiesen, unter der Voraussetzung, daß $a = \frac{s}{r}$ eine rationale Zahl bedeutet, deren Zähler und Nenner den Bedingungen $r \neq 0$, $|s| > |r|^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ genügen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, durch geeignete Modifikation meiner Methode, einen viel allgemeineren Satz von der oben definierten Funktion $\Phi(x, a)$ zu beweisen, der gewissermaßen das Analogon des Hermiteschen Satzes über die Exponentialfunktion bildet. Bekanntlich hat Hermite in seiner berühmten Arbeit „Sur la fonction exponentielle"[2]) einen Satz bewiesen, dem man folgende Fassung geben kann: Bedeuten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ m voneinander verschiedene rationale Zahlen, so kann nicht eine Gleichung der Gestalt

$$C_1 e^{\alpha_1} + C_2 e^{\alpha_2} + \ldots + C_m e^{\alpha_m} = 0$$

für rationale und nicht sämtlich verschwindende Werte der Koeffizienten C_k bestehen. Es entsteht nun naturgemäß die Frage, ob man auch für die Funktion $\Phi(x, a)$ einen ähnlichen Satz aufstellen und beweisen kann. Folgendes Beispiel zeigt, daß der entsprechende Satz für die Funktion

---

[1]) Mathematische Annalen **80**, S. 62–74.

[2]) Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris **77**.

$\Phi(x, a)$ (ohne weitere Einschränkungen über die rationalen Zahlen α_k) im allgemeinen nicht besteht. Durch einfache Umformungen erhält man nämlich

$$\Phi(ax, a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (ax)^\nu a^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}} = 1 + ax \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu-1} a^{-\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}}$$
$$= 1 + ax\,\Phi(x, a), \quad \text{d. h.,}$$

$$\text{(II)} \qquad \Phi(ax, a) = 1 + ax\,\Phi(x, a)$$

und die wiederholte Anwendung der Formel (II) gestattet auch $\Phi(a^h x, a)$ (h = ganz und positiv) linear durch $\Phi(x, a)$ auszudrücken. Man erhält:

$$\text{(III)} \qquad \Phi(a^h x, a) = a^{\frac{h(h+1)}{2}} x^h \Phi(x, a) + a^{\frac{h(h+1)}{2}} x^h \sum_{\nu=1}^{h} x^{-\nu} a^{-\frac{\nu(\nu+1)}{2}}.$$

Sind also α und β zwei rationale Zahlen, deren Quotient eine ganze (positive oder negative) Potenz von a ist, so besteht stets eine Gleichung der Gestalt

$$A\,\Phi(\alpha, a) + B\,\Phi(\beta, a) = C$$

mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten A, B und C.

Um das Hauptergebnis dieser Arbeit bequemer formulieren zu können, führe ich folgende zwei Definitionen ein:

1. Ein System von m rationalen und von Null verschiedenen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ heißt reduziert (in bezug auf a), wenn der Quotient $\alpha_h : \alpha_k$ irgend zweier Zahlen α_h und α_k $(h \neq k)$ des Systems nicht eine ganze Potenz von a ist.

2. Ein Ausdruck von der Form

$$\text{(IV)} \qquad A_1\,\Phi(\alpha_1, a) + A_2\,\Phi(\alpha_2, a) + \ldots + A_m\,\Phi(\alpha_m, a) + A_0,$$

wo A_k und α_k rational sind, heißt reduziert (in bezug auf a), wenn das entsprechende Zahlensystem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ reduziert ist.

Gleichung (III) gestattet stets, einen nichtreduzierten Ausdruck von der Form (IV) in einen reduzierten zu transformieren. Unter Benutzung der Definitionen 1. und 2. läßt sich die in Frage stehende Eigenschaft von $\Phi(x, a)$ folgendermaßen aussprechen:

Satz I. *Es sei m eine ganze positive Zahl und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ein reduziertes System rationaler Zahlen. Es bedeute ferner $a = \frac{s}{r}$ eine rationale Zahl, deren Zähler und Nenner den Bedingungen*

$$r \neq 0, \quad |s| > |r|^{\sigma_m} \quad \left(\sigma_m = \tfrac{1}{2}(2m + 1 + \sqrt{1 + 4m^2})\right)$$

genügen. Dann hat der reduzierte Ausdruck

$$A_1\,\Phi(\alpha_1, a) + \ldots + A_m\,\Phi(\alpha_m, a)$$

einen irrationalen Wert, wenn die rationalen Koeffizienten A_k nicht sämtlich verschwinden.

Der (indirekte) Beweis dieses Satzes wird in den folgenden vier Paragraphen erbracht. Im letzten (fünften) Paragraphen sind einige Folgerungen aus Satz I abgeleitet. Dort beweise ich z. B. (um eine spezielle Folgerung hervorzuheben), daß die Jacobische Thetareihe

$$\Psi(x, n) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} x^{\nu} n^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \quad (n = \text{ganz und } |n| > 1)$$

einen irrationalen Wert hat, wenn x rational und von den Nullstellen der Funktion $\Psi(x, n)$ verschieden ist.

§ 1.

Um Wiederholungen zu vermeiden, verweise ich auf § 1 meiner oben zitierten Abhandlung, den ich als ersten Paragraphen dieser Arbeit ansehe; dabei behalte ich die Numerierung der dort auftretenden Formeln auch hier bei.

§ 2.

Ich definiere nun das Polynom $f(x)$ folgendermaßen. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ m von Null verschiedene rationale Zahlen und λ und μ zwei ganze Zahlen, die den Ungleichungen $\lambda - m > \mu > 1$ genügen. Ich setze

$$\varphi_h(x) = \prod_{k=1}^{\mu} (x - a^{k-1} \alpha_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

und

$$f(x) = x^{\lambda} \varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots \varphi_m(x).$$

Der Grad von $f(x)$ ist offenbar $n = \lambda + m\mu$. Für das Folgende ist es von Wichtigkeit, einige Eigenschaften der Polynome $f_k(0)$, $f_k(\alpha_h)$, $F(0)$, $F(\alpha_h)$ (als Polynome der unbestimmten Größen a; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ betrachtet) abzuleiten.

1. Es ist offenbar $c_0 = 1$ und $c_n = c_{n-1} = \ldots = c_{n-\lambda+1} = 0$.

2. Für $k = 0, 1, \ldots, n - \lambda$ ist c_k ein Polynom in $a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ mit ganzen Koeffizienten; in bezug auf $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ist dieses Polynom homogen und vom Grade k. Um den größten und den kleinsten Exponenten von a in c_k zu bestimmen, bezeichne ich mit q und r' den Quotienten bzw. den Rest der Division von k durch m, so daß $k = qm + r'$ $(0 \leq r' < m)$. Durch Vergleichung der Koeffizienten von $x^{m\mu-k}$ beiderseits der Identität

$$\varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots \varphi_m(x) = c_0 x^{m\mu} + c_1 x^{m\mu-1} + \ldots + c_{m\mu}$$

erhält man leicht, wenn man den größten und den kleinsten Exponenten von a in c_k kurz mit Exp. c_k bzw. exp. c_k bezeichnet,

$$\text{Exp. } c_k = m\left(q\mu - \frac{q(q-1)}{2}\right) + r'(\mu - q - 1)$$
$$= -\frac{1}{2m}(qm + r')^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)(qm + r') - \frac{r'(m - r')}{2m},$$
$$\text{exp. } c_k = m\frac{q(q-1)}{2} + r'q = \frac{1}{2m}(qm + r')^2 - \frac{1}{2}(qm + r') + \frac{r'(m - r')}{2m}.$$

Wird nun die periodische Funktion $\varrho_x = \varrho(x)$ durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \varrho_x = \dfrac{x(m-x)}{2m} \text{ für } 0 \leqq x \leqq m, \\ \varrho_{x+m} = \varrho_x \text{ für jedes reelle } x \end{cases}$$

definiert, so lassen sich die Ausdrücke für Exp. c_k und exp. c_k einfacher folgendermaßen darstellen:

$$\text{Exp. } c_k = -\frac{1}{2m}k^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)k - \varrho_k, \quad \text{exp. } c_k = \frac{1}{2m}k^2 - \frac{1}{2}k + \varrho_k.$$

Die Funktion ϱ_x genügt offenbar für jedes reelle x den Ungleichungen $0 \leqq \varrho_x \leqq \frac{m}{8}$.

3. Nach Formel (6) des § 1 ist für $k = 0, 1, \dots \lambda$ und $h = 1, 2, \dots, m$

$$f_k(\alpha_h) = a^{\frac{k(k-1)}{2}}\{c_0(a^k\alpha_h)^{n-k} + c_1(a^k\alpha_h)^{n-k-1} + \dots + c_{n-\lambda}(a^k\alpha_h)^{\lambda-k}\} \tag{7}$$
$$= a^{\frac{k(k-1)}{2} + k(\lambda-k)}\alpha_h^{\lambda-k}\varphi_1(a^k\alpha_h)\varphi_2(a^k\alpha_h)\dots\varphi_m(a^k\alpha_h).$$

Aus (7) folgt

a) für $k = 0, 1, \dots \mu - 1$ ist $f_k(\alpha_h) = 0$;

b) für $k = \mu, \mu + 1, \dots \lambda$ ist $f_k(\alpha_h)$ ein Polynom, in $a, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ mit ganzen Koeffizienten, homogen in bezug auf $\alpha_1\, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ und vom Grade $\lambda - k + m\mu = n - k$. Der größte und der kleinste Exponent von a in $f_k(\alpha_h)$ sind in diesem Falle

$$\text{Exp. } f_k(\alpha_h) = \frac{k(k-1)}{2} + k(\lambda - k) + \mu k m,$$
$$\text{exp. } f_k(\alpha_h) = \frac{k(k-1)}{2} + k(\lambda - k) + m\frac{\mu(\mu-1)}{2}$$

und man bestätigt leicht, daß für $\mu \leqq k \leqq \lambda$

$$\min \text{exp. } f_k(\alpha_h) = (m+1)\frac{\mu(\mu-1)}{2} + \mu(\lambda - \mu)$$

und

$$\max \text{Exp. } f_k(\alpha_h) = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + m\lambda\mu.$$

4. Es sei $\lambda < k \leqq n$. Nach Formel (6) ist

$$f_k(\alpha_h) = a^{\frac{k(k-1)}{2}}\{c_0(a^k\alpha_h)^{n-k} + c_1(a^k\alpha_h)^{n-k-1} + \dots + c_{n-k}\}.$$

Es ist also wieder $f_k(\alpha_h)$ ein Polynom in $a, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ mit ganzen Koeffizienten, homogen in bezug auf $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ und vom Grade $n-k$. Man findet in diesem Falle für exp. $f_k(\alpha_h)$ und Exp. $f_k(\alpha_h)$

$$\text{exp. } f_k(\alpha_h) = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{1}{2m}(n-k)^2 - \frac{1}{2}(n-k) + \varrho_{n-k},$$

$$\text{Exp. } f_k(\alpha_h) = \frac{k(k-1)}{2} + k(n-k).$$

Ferner ist für $\lambda \leqq k \leqq n$

$$\min \text{exp. } f_k(\alpha_h) = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + m\frac{\mu(\mu-1)}{2}$$

und

$$\max \text{Exp. } f_k(\alpha_h) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Vergleicht man diese Werte für min exp. $f_k(\alpha_h)$ und max Exp. $f_k(\alpha_h)$ $(\lambda \leqq k \leqq n)$ mit den entsprechenden Minimal- und Maximalwerte von exp. $f_k(\alpha_h)$ und Exp. $f_k(\alpha_h)$ für $\mu \leqq k \leqq \lambda$ (S. P. 3, b), so erkennt man leicht, daß

$$\min_{\lambda \leqq k \leqq n} \text{exp. } f_k(\alpha_h) > \min_{\mu \leqq k < \lambda} \text{exp. } f_k(\alpha_h)$$

und

$$\max_{\lambda \leqq k \leqq n} \text{Exp. } f_k(\alpha_h) > \max_{\mu \leqq k < \lambda} \text{Exp. } f_k(\alpha_h).$$

Zusammengenommen folgt aus 3. *und* 4., *daß*

$$F(\alpha_h) = \sum_{k=0}^{n} f_k(\alpha_h) = \sum_{k=\mu}^{n} f_k(\alpha_h)$$

(A) *ein Polynom in $a, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ mit ganzen Koeffizienten darstellt. Der kleinste und der größte Exponent von a in $F(\alpha_h)$ sind gleich $(m+1)\frac{\mu(\mu-1)}{2} + \mu(\lambda-\mu)$ bzw. $\frac{n(n-1)}{2}$. In bezug auf die m Größen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ist der Grad von $F(\alpha_h)$ gleich demjenigen von $f_\mu(\alpha_h)$, d. h. gleich $n-\mu$.*

5. Nach Formel (6) des § 1 ist $f_k(0) = a^{\frac{k(k-1)}{2}} c_{n-k}$, woraus folgt, daß auch $f_k(0)$ ein Polynom in $a, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ mit ganzen Koeffizienten darstellt. Es ist außerdem

a) $f(0) = f_1(0) = \ldots = f_{\lambda-1}(0) = 0$;

b) für $\lambda \leqq k \leqq n$ ist der kleinste Exponent von a in $f_k(0)$ gleich

$$\text{exp. } f_k(0) = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{1}{2m}(n-k)^2 - \frac{1}{2}(n-k) + \varrho_{n-k} = \text{exp. } f_k(\alpha_h).$$

Man erhält also für den Minimalwert von exp. $f_k(0)$ (vgl. Punkt 4)

$$\min \text{exp. } f_k(0) = \text{exp. } f_\lambda(0) = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + m\frac{\mu(\mu-1)}{2}.$$

c) Für $\lambda \leqq k \leqq n$ ist

$$\text{Exp.}\, f_k(0) = \frac{k(k-1)}{2} - \frac{1}{2m}(n-k)^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)(n-k) - \varrho_{n-k}$$

und

$$\max \text{Exp.}\, f_k(0) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

d) Endlich ist das Polynom $f_k(0) = a^{\frac{k(k-1)}{2}} c_{n-k}$ homogen in bezug auf $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ und vom Grade $n-k$.

Aus 5. a), b), c), d) *folgt, daß*

$$F(0) = \sum_{k=0}^{n} f_k(0) = \sum_{k=\lambda}^{n} f_k(0)$$

(B) *ein Polynom in $a, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ mit ganzen Koeffizienten ist. Der kleinste und der größte Exponent von a in $F(0)$ sind $\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + m\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ bzw. $\frac{n(n-1)}{2}$. In bezug auf $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ist $F(0)$ vom Grade $n-\lambda$.*

Es sei noch bemerkt, daß exp. $F(0) >$ exp. $F(\alpha_h)$, d. h.

$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + m\frac{\mu(\mu-1)}{2} > (m+1)\frac{\mu(\mu-1)}{2} + \mu(\lambda-\mu).$$

§ 3.

Nach diesen vorläufigen Untersuchungen über die Polynome $f_k(\alpha_h)$ und $f_k(0)$ gehe ich zum indirekten Beweise des in der Einleitung formulierten Satzes über. Ich nehme also an, es gäbe ein reduziertes System von m rationalen und von Null verschiedenen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ derart, daß der reduzierte Ausdruck

$$A_1 \Phi(\alpha_1, a) + A_2 \Phi(\alpha_2, a) + \ldots + A_m \Phi(\alpha_m, a)$$

(wo die rationalen Koeffizienten A_h nicht sämtlich verschwinden) einen rationalen Wert hat:

(8) $$A_1 \Phi(\alpha_1, a) + \ldots + A_m \Phi(\alpha_m, a) = A.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf ich annehmen, daß die Koeffizienten $A_1, \ldots, A_m, A$ ganz und (mit etwaiger Ausnahme von A) von Null verschieden sind. Unter $f(x)$ verstehe ich jetzt das am Anfang des vorigen Paragraphen definierte Polynom

$$f(x) = x^\lambda \prod_{h=1}^{m} \prod_{k=1}^{\mu} (x - a^{k-1}\alpha_h),$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ das reduzierte System bedeutet, für welches (nach

der oben gemachten Annahme) Gl. (8) besteht. Man setze nun in die Fundamentalformel (5′) des § 1 sukzessiv $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, 0$ ein und addiere die so entstandenen Gleichungen, nachdem sie der Reihe nach mit den ganzen Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, A_m, -A$ multipliziert werden. Auf diese Weise entsteht — mit Rücksicht auf (8) — die Gleichung

$$0 = A_1 F(\alpha_1) + A_2 F(\alpha_2) + \ldots + A_m F(\alpha_m) - A F(0)$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} A_k (c_0 \Theta_{nk} \alpha_k^n + c_1 \Theta_{n-1,k} \alpha_k^{n-1} + \ldots + c_n \Theta_{0k}) \Phi(|\alpha_k|, |a|)$$
$$(\Theta_{hk} = \Theta_h(\alpha_k, a),\ h = 0, 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m),$$

welche durch Multiplikation mit $a^{-\varrho}$ in

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} & a^{-\varrho}\{A_1 F(\alpha_1) + \ldots + A_m F(\alpha_m) - A F(0)\} \\ & = -a^{-\varrho} \sum_{k=1}^{m} A_k (c_0 \Theta_{nk} \alpha_k^n + \ldots + c_n \Theta_{0k}) \Phi(|\alpha_k|, |a|) \end{aligned}$$

übergeht; hierbei bedeutet ϱ die ganze Zahl $\varrho = (m+1)\frac{\mu(\mu-1)}{2} + \mu(\lambda - \mu)$. Nach den Schlußfolgerungen (A) und (B) des vorigen Paragraphen ist die linke Seite von (9) ein Polynom in $a, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ mit ganzen Koeffizienten, dessen Grad in bezug auf a gleich $\frac{n(n-1)}{2} - \varrho$ und in bezug auf die Gesamtheit der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ gleich $n - \mu$ ist. Ich setze nun $a = \frac{s}{r}$ (s und r ganz und teilerfremd) und bezeichne mit N den Generalnenner der rationalen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Dann folgt aus (9), wenn man beiderseits mit $r^{\frac{n(n-1)}{2} - \varrho} N^{n-\mu}$ multipliziert, die Gleichung

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} & r^{\frac{n(n-1)}{2} - \varrho} N^{n-\mu} a^{-\varrho}\{A_1 F(\alpha_1) + \ldots + A_m F(\alpha_m) - A F(0)\} \\ & = -r^{\frac{n(n-1)}{2} - \varrho} N^{n-\mu} a^{-\varrho} \sum_{k=1}^{m} A_k (c_0 \Theta_{nk} \alpha_k^n + \ldots + c_n \Theta_{0k}) \Phi(|\alpha_k|, |a|) \end{aligned}$$

in der die linke Seite eine ganze Zahl ist.

Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist, zu zeigen, daß Gl. (10) zu einem Widerspruch führt. Zu diesem Zweck bestimme ich zunächst eine obere Schranke für die rechte Seite von (10). Bedeutet α die größte der Zahlen $|\alpha_k|$, so findet man leicht (vgl. die entsprechende Abschätzung auf S. 70 meiner früheren Arbeit)

$$|c_0 \Theta_{nk} \alpha_k^n + \ldots + c_n \Theta_{0k}| < \alpha^n 2^{m\mu} |a|^{m\frac{\mu(\mu-1)}{2}}.$$

Folglich muß der Betrag der rechten Seite von (10) kleiner als

$$R = |r|^{\frac{n(n-1)}{2} - \varrho} |N|^{n-\mu} |a|^{-\varrho} K m \alpha^n 2^{m\mu} |a|^{m\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \Phi(\alpha, |a|)$$

sein, wobei K die größte der Zahlen $|A_h|$ bedeutet. Es sei ferner β eine feste Zahl, größer als 1, und es bedeute λ irgend eine ganze Zahl der Reihe $[\beta\mu] = \lambda_0, \lambda_0 + 1, \ldots, \lambda_0 + m - 1$. Offenbar ist $\lim\limits_{\mu \to \infty} \frac{\lambda}{\mu} = \beta > 1$, so daß für genügend große Werte von μ die Ungleichungen $\lambda - m > \mu > 1$ bestehen. Diese obere Schranke R kann beliebig klein gemacht werden, falls $\lim\limits_{\mu \to \infty} R = 0$, oder (was dasselbe bedeutet) falls $\lim \log R = -\infty$. Das ist aber sicher der Fall, wenn $\lim \frac{1}{\mu^2} \log R < 0$, d. h. wenn

$$\left\{\frac{1}{2}(\beta + m)^2 - \frac{1}{2} m\right\} \log |r| + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \log |s| < 0. \tag{11}$$

Ist a eine ganze Zahl, so ist die letzte Ungleichung von selbst erfüllt, da in diesem Falle $|r| = 1$, $|a| = |s| > 1$ und $\beta > 1$ ist. Ist dagegen $|r| > 1$, so kann man

$$|s| = |r|^\tau \quad \left(\tau = \frac{\log |s|}{\log |r|}\right)$$

setzen; dann ist (11) äquivalent mit

$$(\beta + m)^2 - m + (1 - 2\beta)\tau < 0, \text{ oder mit } \tau > \frac{(\beta + m)^2 - m}{2\beta - 1}. \tag{12}$$

Ich bestimme nun β derart, daß die rechte Seite von (12) möglichst klein ausfällt. Dieser günstigste Wert von β ist $\beta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4m^2})$, wobei die Ungleichung (12) in

$$\tau > \frac{1}{2}(2m + 1 + \sqrt{1 + 4m^2}) = \sigma_m, \text{ oder in } |s| > |r|^{\sigma_m} \tag{13}$$

übergeht.

Bedeuten also s und r zwei von Null verschiedene ganze Zahlen, die der Bedingung (13) genügen, so hat der Ausdruck R den Limes Null, wenn die ganzen Zahlen λ und μ derart nach $+\infty$ streben, daß $\lim \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4m^2})$. Dasselbe gilt auch von der rechten Seite der Gl. (10).

§ 4.

Um die Unmöglichkeit der Gl. (10) zu beweisen, bleibt noch übrig zu zeigen, daß unter denselben Voraussetzungen für die Zahl $a = \frac{s}{r}$ und für jeden genügend großen Wert der ganzen Zahl μ mindestens ein ganzer Wert von λ zwischen $\lambda_0 = [\beta\mu]$ (inkl.) und $\lambda_0 + m - 1$ (inkl.) besteht derart, daß die linke Seite von (10) eine *von Null verschiedene* ganze Zahl darstellt. Ich betrachte zunächst die Summe

$$r^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{n-\mu}\{A_1 F(\alpha_1)+\ldots+A_m F(\alpha_m)-A F(0)\}$$

$$(14)\quad = r^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{n-\mu}\sum_{k=\mu}^{\lambda}\{A_1 f_k(\alpha_1)+\ldots+A_m f_k(\alpha_m)\}$$

$$+ r^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{n-\mu}\sum_{k=\lambda+1}^{n}\{A_1 f_k(\alpha_1)+\ldots+A_m f_k(\alpha_m)\} - r^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{n-\mu} A F(0),$$

welche aus der linken Seite von (10) durch Multiplikation mit der ganzen Zahl s^{ϱ} hervorgeht. Das allgemeine Glied der Summe

$$(15)\qquad r^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{n-\mu}\sum_{k=\mu}^{\lambda}\{A_1 f_k(\alpha_1)+\ldots+A_m f_k(\alpha_m)\}$$

ist die ganze Zahl $r^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{n-\mu}\{A_1 f_k(\alpha_1)+\ldots+A_m f_k(\alpha_m)\}$, die ihrerseits eine Summe von m ganzen Zahlen der Gestalt

$$r^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{n-\mu} A_h f_k(\alpha_h) \qquad (h=1,2,\ldots,m)$$

darstellt. Nach Formel (7) ist

$$(16)\quad r^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{n-\mu} A_h f_k(\alpha_h) = r^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{n-\mu} A_h a^{\frac{k(k-1)}{2}+k(\lambda-k)} \alpha_h^{\lambda-k}\varphi_1(a^k\alpha_h)\ldots\varphi_m(a^k\alpha_h).$$

Wird ferner $N\alpha_h = b_h$ gesetzt, so ist

$$\varphi_i(a^k\alpha_h) = (a^k\alpha_h-\alpha_i)(a^k\alpha_h-a\alpha_i)\ldots(a^k\alpha_h-a^{\mu-1}\alpha_i)$$
$$= a^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}}(a^k\alpha_h-\alpha_i)(a^{k-1}\alpha_h-\alpha_i)\ldots(a^{k-\mu+1}\alpha_h-\alpha_i)$$
$$= r^{-k\mu}N^{-\mu}s^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}}(s^k b_h-r^k b_i)(s^{k-1}b_h-r^{k-1}b_i)\ldots(s^{k-\mu+1}b_h-r^{k-\mu+1}b_i)$$
$$= r^{-k\mu}N^{-\mu}s^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}}M_{hi}^{(k)},$$

wenn man mit $M_{hi}^{(k)}$ die ganze Zahl

$$M_{hi}^{(k)} = (s^k b_h - r^k b_i)(s^{k-1}b_h - r^{k-1}b_i)\ldots(s^{k-\mu+1}b_h - r^{k-\mu+1}b_i)$$

bezeichnet ($h, i = 1, 2, \ldots, m$; $k=\mu, \mu+1, \ldots, \lambda$). Da $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ein reduziertes System bilden, so ist $\varphi_i(a^k\alpha_h)$ und folglich $M_{hi}^{(k)}$ von Null verschieden. Es ist also

$$\varphi_1(a^k\alpha_h)\varphi_2(a^k\alpha_h)\ldots\varphi_m(a^k\alpha_h) = r^{-km\mu}N^{-m\mu}s^{m\frac{\mu(\mu-1)}{2}}M_{h1}^{(k)}M_{h2}^{(k)}\ldots M_{hm}^{(k)}$$

und

$$(17)\qquad r^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{n-\mu}A_h f_k(\alpha_h) = r^c s^d N^{k-\mu}A_h b_h^{\lambda-k}M_{h1}^{(k)}\ldots M_{hm}^{(k)},$$

wobei die Exponenten c und d der Kürze halber die positiven ganzen Zahlen

$$c = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} - k(\lambda - k) - mk\mu = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

und

$$d = \frac{k(k-1)}{2} + k(\lambda - k) + m\frac{\mu(\mu-1)}{2}$$

bedeuten.

Es bedeute ferner p eine in s aufgehende Primzahl (eine solche existiert, da $|s| > 1$ ist). Es sei außerdem

t der Exponent von p in s	$(t \geqq 1)$;
u " " " p " N	$(u \geqq 0)$;
v_h " " " p " b_h	$(v_h \geqq 0)$;
v der größte der Exponenten $v_1, v_2, \ldots, v_m$	$(v \geqq v_h)$;
w_h der Exponent von p in A_h	$(w_h \geqq 0)$.

Um eine untere Schranke für den Exponenten von p in $M_{hi}^{(k)}$ zu bestimmen, bemerke ich zunächst, daß $M_{hi}^{(k)}$ gleich dem Produkte von μ Faktoren von der Form $s^g b_h - r^g b_i$ $(g = k, k-1, \ldots, k-\mu+1)$ ist. Da $k \geqq \mu$ ist, so geht die Primzahl p in jedem der ersten $\mu - v$*) dieser Faktoren genau v_i mal auf. Der Exponent von p in $M_{hi}^{(k)}$ ist also nicht kleiner als $(\mu - v)v_i$, und daraus folgt, daß der Exponent von p in der ganzen Zahl (17) mindestens gleich

$$(18)\qquad \left\{\frac{k(k-1)}{2} + k(\lambda - k) + m\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right\} t + (k-\mu)u + w_h$$
$$+ (\lambda - k)v_h + (\mu - v)\cdot\sigma \qquad (\sigma = v_1 + v_2 + \ldots + v_m)$$

ist. Ist etwa v_1 die kleinste (oder eine der kleinsten) der Zahlen v_h, so erhält man leicht aus (18) folgende untere Schranke für den Exponenten von p in der ganzen Zahl (17):

$$(18')\qquad \left\{\frac{k(k-1)}{2} + k(\lambda - k) + m\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right\} t + (k-\mu)u$$
$$+ (\lambda - k)v_1 + (\mu - v)\sigma.$$

Dies ist zugleich eine untere Schranke für den Exponenten von p in

$$r^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{n-\mu}\{A_1 f_k(\alpha_1) + \ldots + A_m f_k(\alpha_m)\},$$

d. h. im allgemeinen Gliede der Summe (15).

Es ist notwendig, außerdem den Exponenten von p im Produkte

$$(19)\qquad M_{h1}^{(\mu)} M_{h2}^{(\mu)} \ldots M_{hm}^{(\mu)} = M_h$$

*) Es wird $\mu > v$ vorausgesetzt.

genau zu bestimmen. Das Produkt der ersten $\mu - v$ Faktoren von

$$M_{ki}^{(\mu)} = (s^{\mu} b_k - r^{\mu} b_i)(s^{\mu-1} b_k - r^{\mu-1} b_i) \ldots (s b_k - r b_i)$$

ist genau durch $p^{(\mu-v)v_i}$ und nicht durch eine höhere Potenz von p teilbar. Bezeichnet ferner e_{ki} den Exponenten der höchsten Potenz von p, die im Produkte

$$(s^{v} b_k - r^{v} b_i)(s^{v-1} b_k - r^{v-1} b_i) \ldots (s b_k - r b_i)\,^{4})$$

aufgeht, so ist der Exponent von p in $M_{ki}^{(\mu)}$ gleich $(\mu - v) v_i + e_{ki}$; daraus folgt, daß der Exponent von p in M_k genau gleich $(\mu - v)\sigma + e_k$ ist, wobei zur Abkürzung

$$\sigma = v_1 + v_2 + \ldots + v_m \quad \text{und} \quad e_k = e_{k1} + e_{k2} + \ldots + e_{km}$$

gesetzt ist.

Das erste Glied der Summe (15) kann, unter Benutzung der Gleichungen (17) und (19), auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$(20) \qquad r^{c'} s^{d'} \{A_1 M_1 b_1^{\lambda-\mu} + \ldots + A_m M_m b_m^{\lambda-\mu}\}$$

$$\left(c' = \frac{(n-\mu)(n-\mu-1)}{2}, \quad d' = (m+1)\frac{\mu(\mu-1)}{2} + \mu(\lambda - \mu)\right);$$

die Zahlen $M_1, \ldots, M_m$ sind dabei von λ unabhängig. Ich wähle nun die ganze Zahl λ zwischen $\lambda_0 = [\beta\mu]$ und $\lambda_0 + m$ so, daß der Exponent von p in

$$A_1 M_1 b_1^{\lambda-\mu} + \ldots + A_m M_m b_m^{\lambda-\mu}$$

möglichst klein wird. Dieser kleinste Exponent kann nicht größer als

$$\omega = w_1 + (\lambda_0 - \mu) v_1 + (\mu - v)\sigma + e_1 + \delta$$

sein, unter δ den Exponenten von p in der ganzen Zahl

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1^{m-1} & b_2^{m-1} & \ldots & b_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{m} (b_k - b_i)$$

verstanden. Wäre nämlich

$$A_1 M_1 b_1^{\lambda-\mu} + \ldots + A_m M_m b_m^{\lambda-\mu} \equiv 0 \pmod{p^{\omega+1}}$$

für $\lambda = \lambda_0, \lambda_0 + 1, \ldots, \lambda_0 + m - 1$, so folgt daraus (analog wie bei einem Gleichungssystem) die Kongruenz

$$\Delta \cdot A_1 M_1 b_1^{\lambda_0-\mu} \equiv 0 \pmod{p^{\omega+1}},$$

welche unmöglich ist, da die linke Seite genau durch p^{ω} und nicht durch eine höhere Potenz von p teilbar ist.

---

[4]) Dieses Produkt ist durch 1 zu ersetzen, falls $v = 0$ ist.

Bei dieser Wahl von λ ist der Exponent von p in der Zahl (20), d. h. im ersten Gliede der Summe (15), nicht größer als

$$\left\{(m+1)\frac{\mu(\mu-1)}{2}+\mu(\lambda-\mu)\right\}t+w_1+(\lambda_0-\mu)v_1 \tag{21}$$
$$+(\mu-v)\sigma+e_1+\delta,$$

und dieser Exponent ist seinerseits kleiner als die Exponenten von p in allen übrigen Gliedern der Summe (15), wenn nur die Zahl μ groß genug vorausgesetzt wird. Dies folgt aus der Ungleichung

$$\left\{(m+1)\frac{\mu(\mu-1)}{2}+\mu(\lambda-\mu)\right\}t+w_1+(\lambda_0-\mu)v_1+(\mu-v)\sigma+e_1+\delta$$
$$<\left\{\frac{k(k-1)}{2}+k(\lambda-k)+m\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right\}t+(k-\mu)u$$
$$+(\lambda-k)v_1+(\mu-v)\sigma$$

oder

$$w_1+e_1+\delta<(k-\mu)\left\{\left(\lambda-\frac{k+\mu+1}{2}\right)t+u-v_1\right\}+(\lambda-\lambda_0)v_1,$$

deren Richtigkeit für $k \geqq \mu+1$ und für alle genügend großen Werte von μ leicht bestätigt werden kann. (Es ist zu beachten, daß t, u, v_1, w_1, e_1 und δ von μ und λ unabhängige, nicht negative Zahlen bedeuten.)

Es läßt sich ebenso beweisen, daß die ganzen Zahlen

$$\left\{\begin{array}{l} r^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{n-\mu} \sum\limits_{k=\lambda+1}^{n} \{A_1 f_k(\alpha_1)+\ldots+A_m f_k(\alpha_m)\} \quad \text{und} \\ r^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{n-\mu} A F(0) \end{array}\right. \tag{22}$$

den Primfaktor p in einer höheren Potenz enthalten als das erste Glied der Summe (15). Nach Punkt 4 des § 2 und der Schlußfolgerung (B) desselben Paragraphen sind $f_k(\alpha_h)$ und $F(0)$ (für $\lambda \leqq k \leqq n$) Polynome in $a, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ mit ganzen Koeffizienten, die algebraisch durch a^η teilbar sind, wobei zur Abkürzung $\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}+m\frac{\mu(\mu-1)}{2}=\eta$ gesetzt wird. Multipliziert man diese Polynome mit $r^{\frac{n(n-1)}{2}} N^{n-\mu}$, so geht offenbar jedes Glied in eine ganze Zahl über, die durch s^η, also auch durch $p^{\eta t}$ teilbar ist. Für genügend großes μ ist aber der Exponent $\eta t=\left\{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}+m\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right\}t$ größer als die ganze Zahl (21).

Zusammenfassend folgt aus den letzten Betrachtungen: jedem genügend großen ganzen Wert von μ entspricht mindestens ein ganzer Wert von λ zwischen $[\beta\mu]$ und $[\beta\mu]+m$ derart, daß der Exponent von p im ersten Gliede der Summe (14) nicht größer als die Zahl (21) ist, während alle übrigen Glieder dieser Summe durch eine Potenz von p teil-

bar sind, deren Exponent größer als die Zahl (21) ist. Hiernach hat diese Summe einen *von Null verschiedenen* ganzen Wert. Dasselbe gilt natürlich auch von der linken Seite der Gleichung (10). Andererseits kann der Betrag der rechten Seite von (10), unter denselben Voraussetzungen über μ und λ, beliebig klein gemacht werden, was zu einem Widerspruch führt. Man kann also von vornherein die ganzen Zahlen μ und λ so wählen, daß die Gleichung (10) unmöglich ist. Daraus folgt aber die Unzulässigkeit der Annahme, daß der reduzierte Ausdruck

$$A_1\Phi(\alpha_1, a) + \ldots + A_m\Phi(\alpha_m, a)$$

einen rationalen Wert hat, d. h. die Richtigkeit von Satz I.

§ 5.

In diesem Paragraphen werden gewisse arithmetische Eigenschaften der Jacobischen Thetareihe

$$(23) \qquad \Psi(x, a) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} x^\nu a^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \qquad (|a| > 1)$$

abgeleitet, die sich fast unmittelbar als Folgerungen aus Satz I ergeben. Ich bemerke zunächst, daß die unendliche Reihe (23) sich als Summe zweier Reihen der Gestalt

$$\Phi(x, a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu a^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$$

darstellen läßt. In der Tat ist

$$\Psi(x, a) = \Phi(x, a) + \sum_{\nu=-1}^{-\infty} x^\nu a^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}} = \Phi(x, a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{-\nu} a^{-\frac{\nu(\nu+1)}{2}}$$

$$= \Phi(x, a) + \frac{1}{ax}\sum_{\nu=1}^{\infty} (a^2x)^{-\nu+1} a^{-\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}} = \Phi(x, a) + \frac{1}{ax}\Phi\left(\frac{1}{a^2x}, a\right)$$

oder

$$(24) \qquad \Psi(x, a) = \Phi(x, a) + \frac{1}{ax}\Phi\left(\frac{1}{a^2x}, a\right).$$

Die letzte Formel gestattet, die in Frage stehenden Eigenschaften der Funktion $\Psi(x, a)$ auf diejenigen von $\Phi(x, a)$ zurückzuführen. Auf diese Weise ergibt sich z. B. der

Satz II. *Es sei $a = \frac{s}{r}$ eine rationale Zahl, deren Zähler und Nenner den Bedingungen*

$$r \neq 0, \quad |s| > |r|^{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}$$

genügen. Dann hat die transzendente Funktion

$$\Psi(x,a) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} x^\nu a^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$$

einen irrationalen Wert, wenn x rational und von den Nullstellen[5]) *der Funktion $\Psi(x,a)$ verschieden ist.*

Nach Satz I (angewandt auf $m=2$) hat nämlich der zweigliedrige Ausdruck

$$\Phi(x) + \frac{1}{ax}\Phi\left(\frac{1}{a^2x}\right) = \Psi(x)\ ^{6})$$

für rationale (und von Null verschiedene) Werte von x einen irrationalen Wert, falls der Quotient $x : \frac{1}{a^2x} = a^2x^2$ nicht eine ganze Potenz von a ist. Nun kann aber a^2x^2 gleich einer ganzen Potenz von a sein, wenn $x = \varepsilon a^{k-1}$ oder $x = \varepsilon a^{k-\frac{1}{2}}$ ist, wobei $\varepsilon = \pm 1$ und k eine ganze Zahl bedeutet. Es bleiben demnach noch folgende drei Fälle zu betrachten:

1. $x = a^{k-1}$. Aus der (leicht verifizierbaren) Funktionalgleichung $\Psi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\Psi(x)$ folgt, daß man sich in diesem Falle auf positive (ganze) Werte von k beschränken darf. Nach (24) ist, wenn man $x = a^{k-1}$ setzt,

$$\Psi(a^{k-1}) = \Phi(a^{k-1}) + a^{-k}\Phi(a^{-k-1}).$$

Aus Formel (III) der Einleitung ergibt sich ferner, wenn man $h = 2k$ und $x = a^{-k-1}$ setzt,

$$\Phi(a^{k-1}) = a^{-k}\Phi(a^{-k-1}) + \text{rationale Zahl.}$$

Somit geht Gleichung (24) über in

$$\Psi(a^{k-1}) = 2a^{-k}\Phi(a^{-k-1}) + \text{rat. Zahl.}$$

Wäre nun $\Psi(a^{k-1})$ rational, so wäre auch $\Phi(a^{-k-1})$ rational, was bei den gemachten Voraussetzungen über die Zahl a unmöglich ist (vgl. den Hauptsatz meiner anfangs zitierten Arbeit).

2. $x = -a^{k-1}$. In diesem Falle ist $\Psi(-a^{k-1}) = 0$.

3. $x = \varepsilon a^{k-\frac{1}{2}}$. Da x stets als rational vorausgesetzt wird, so kommt dieser Fall in Betracht nur wenn a das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Der Funktionalgleichung $\Psi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\Psi(x)$ zufolge kann man wieder k positiv voraussetzen. Aus

$$\Psi(\varepsilon a^{k-\frac{1}{2}}) = \Phi(\varepsilon a^{k-\frac{1}{2}}) + \varepsilon a^{-k-\frac{1}{2}}\Phi(\varepsilon a^{-k-\frac{3}{2}})$$

---

[5]) Bekanntlich hat $\Psi(x,a)$ unendlich viele Nullstellen, die durch die Formel $x = -a^k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) gegeben sind.

[6]) Ich schreibe kürzer $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ statt $\Phi(x,a)$ und $\Psi(x,a)$.

und aus Formel (III) (angewandt bei $h = 2k + 1$ und $x = \varepsilon a^{-k-\frac{3}{2}}$) erhält man

$$\Psi(\varepsilon a^{k-\frac{1}{2}}) = 2\varepsilon a^{-k-\frac{1}{2}}\Phi(\varepsilon a^{-k-\frac{3}{2}}) + \varepsilon a^{-k-\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{2k+1}\varepsilon^\nu a^{-\frac{\nu(\nu+1)}{2}+(k+\frac{1}{2})\nu}$$

$$= 2\varepsilon a^{-k-\frac{1}{2}}\Phi(\varepsilon a^{-k-\frac{3}{2}}) - \text{rat. Zahl}.$$

Wäre also $\Psi(\varepsilon a^{k-\frac{1}{2}})$ rational, so wäre nach der letzten Gleichung auch $\Phi(\varepsilon a^{-k-\frac{3}{2}})$ rational, was bei den gemachten Voraussetzungen über die Zahl a unmöglich ist.

Damit ist Satz II vollständig bewiesen.

Satz I gestattet auch in gewissen Fällen durch endlich viele Schritte zu entscheiden, ob ein Ausdruck von der Form

$$A_1\Psi(\alpha_1) + A_2\Psi(\alpha_2) + \ldots + A_m\Psi(\alpha_m) \tag{25}$$

für rationale Werte von α_k und A_k einen rationalen Wert hat oder nicht. Bedeutet z. B. a eine ganze Zahl, absolut größer als 1, so läßt sich der Ausdruck (25) mittels der Formeln (24) und (III) in einen reduzierten Ausdruck der Gestalt (IV) transformieren, auf welchen Satz I unmittelbar anwendbar ist.

Sofia, den 1. April 1920.

(Eingegangen am 16. 12. 1920.)

Über das Fundamentallemma der Variationsrechnung.

Von

A. Razmadzé in Tiflis (Georgien).

Der Zweck der vorliegenden Note ist eine Verallgemeinerung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung, welche sowohl die gewöhnliche Form dieses Lemmas als auch das Du Bois-Reymondsche Lemma als Spezialfälle enthält.

Satz. *Es seien $M(x)$, $N(x)$ zwei stetige und definierte Funktionen im Intervall (x_1, x_2). Wenn dann*

$$I = \int_{x_1}^{x_2} [M(x)\,y(x) + N(x)\,y'(x)]\,dx$$

verschwindet für alle möglichen Formen der stetig differentiierbaren Funktion $y(x)$, welche in x_1 und x_2 verschwinden, so existiert eine stetige Ableitung der Funktion $N(x)$ im Innern des Intervalls (x_1, x_2) und es ist

$$\frac{d}{dx} N(x) = M(x).$$

Man wähle eine Funktion $\varphi(z)$ folgendermaßen:

Es sei x, ξ ein Teilintervall von (x_1, x_2) und ε eine positive Größe, die $< \frac{\xi - x}{2}$. Die Funktion $\varphi(z)$ wächst beständig von 0 bis ε, während z von x bis $x + \varepsilon$ wächst, und nimmt beständig von ε bis 0 ab, wenn z von $\xi - \varepsilon$ bis ξ wächst. Aber im Intervall $(x + \varepsilon, \xi - \varepsilon)$ bleibt sie konstant $= \varepsilon$, und $\varphi(z) \equiv 0$ in (x_1, x) und in (ξ, x_2). Außerdem besitzt sie durchweg eine stetige Ableitung, auch für $z = x,\ x + \varepsilon,\ \xi - \varepsilon,\ \xi$.

Diese Funktion ist genau von der Form $y(z)$, welche in unserem Satze angegeben war, daher muß das Integral I gebildet für diese Funktion $\varphi(z)$ gleich 0 sein, d. h.

$$\int_{x}^{x+\varepsilon} [M(z)\varphi(z) + N(z)\varphi'(z)]\,dz + \varepsilon \int_{x+\varepsilon}^{\xi-\varepsilon} M(z)\,dz + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} [M(z)\varphi(z) + N(z)\varphi'(z)]\,dz = 0,$$

oder

$$(1)\quad \int_{x}^{x+\varepsilon} N(z)\varphi'(z)dz + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} N(z)\varphi'(z)dz + \varepsilon\int_{x+\varepsilon}^{\xi-\varepsilon} M(z)dz = -\int_{x}^{x+\varepsilon} M(z)\varphi(z)dz - \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} M(z)\varphi(z)dz$$

Sei G das Maximum der Funktion $|M(z)|$ im Intervall (x_1, x_2). Aus der vorhergehenden Gleichung folgt:

$$\left|\int_{x}^{x+\varepsilon} N(z)\varphi'(z)\,dz + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi} N(z)\,\varphi'(z)\,dz + \varepsilon\int_{x+\varepsilon}^{\xi-\varepsilon} M(z)dz\right| < 2G\varepsilon^2.$$

Dividieren wir nun beide Seiten der Gleichung (1) durch $\varepsilon(\xi - x)$ und gehen wir zur Grenze $\varepsilon = 0$ über, so folgt unter Anwendung des ersten Mittelwertsatzes

$$\frac{N(x)-N(\xi)}{\xi - x} + \frac{1}{\xi - x}\int_{x}^{\xi} M(z)\,dz = 0,$$

oder

$$(2)\quad \frac{N(\xi)-N(x)}{\xi - x} = \frac{1}{\xi - x}\int_{x}^{\xi} M(z)\,dz.$$

Diese Gleichung soll für jedes Zahlenpaar x, ξ, das zum Intervall (x_1, x_2) gehört, identisch erfüllt sein.

Nehmen wir x als konstant und lassen wir ξ sich der Grenze x nähern, dann geht die rechte Seite der Gleichung (2) zur Grenze $M(x)$, also muß auch die Grenze der linken Seite existieren, d. h.

$$\frac{dN(x)}{dx} = M(x).$$

Unser Satz enthält das Fundamentallemma der Variationsrechnung einerseits (für $N(x) \equiv 0$) und das Du Bois-Reymondsche Lemma andererseits (für $M(x) \equiv 0$) als spezielle Fälle und zwar in der allgemein üblichen Formulierung (vgl. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, S. 25, 27).

Ferner folgt mit Hilfe dieses Satzes unmittelbar und ohne Anwendung einer partiellen Integration, weder der Lagrangeschen noch der Du Bois-Reymondschen, aus dem Verschwinden der ersten Variation des Integrals $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx$ die Eulersche Differentialgleichung.

Tiflis, Universität, 17. Oktober 1920.

(Eingegangen am 15. 2. 1921.)

Zur Theorie der trigonometrischen Reihen.

Von

Ludwig Neder in Göttingen.

Die drei Abschnitte der vorliegenden Arbeit [1]) sind voneinander durchaus unabhängig und jeder mit einer besonderen Einleitung versehen.

Abschnitt I.

Eine Ergänzung zu Riemanns Theorie der trigonometrischen Reihen.

Riemann gibt in seiner klassischen Theorie [2]) der trigonometrischen Reihen mit nach Null strebenden Koeffizienten eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz in einem Punkte x und formuliert anschließend [3]) den daraus folgenden Satz, daß die letztere nur abhängt von den Werten der (scil. durch Riemannsche Summation zu bestimmenden) Reihensumme $f(x)$ in unmittelbarer Nähe dieses Wertes.

Die entsprechenden Fragen für *gleichmäßige* Konvergenz in einem Intervall [4]) sind bisher vernachlässigt worden und sollen im folgenden erledigt werden. Diese Darstellung ist bereits für den speziellen Fall der Konvergenz in nur einem Punkte in verschiedener Hinsicht einfacher [5]) als die (in allzu engem Anschluß an Riemann) bisher gegebenen [6]). Sie folgt im übrigen durchaus dem von Riemann gegebenen Vorbilde und ist nur soweit ausgeführt, als nennenswerte Abweichungen von demselben in Frage kommen.

---

[1]) Dieselbe bildet einen Teil meiner Habilitationsschrift, die Ostern 1920 der Philos. Fakultät der Universität Göttingen vorgelegen hat.

[2]) Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe; Art. 9, Absatz III.

[3]) A. a. O., Art. 10.

[4]) Die Formulierung für andere Punktmengen erscheint hier nicht der Mühe wert.

[5]) Vgl. weiter unten, besonders Fußnote 12.

[6]) H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, Paris 1906, S. 113–120. E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Cambridge 1907, S. 741, 742.

Weiter wird ein von Herrn M. Riesz ausgesprochener [18]), recht allgemeiner Konvergenzsatz für Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises ebenfalls auf gleichmäßige Konvergenz übertragen, worin eine ebenfalls von Herrn M. Riesz gegebene Verallgemeinerung des bekannten Fatouschen Satzes enthalten ist.

Hilfssatz 1. Es sei $0 < \varepsilon < \pi$; die überall definierte Funktion $\lambda(t)$ besitze die Periode 2π, eine stetige dritte Ableitung, und es sei

$$\lambda(t) = 0 \quad \text{für} \quad -\varepsilon \leqq t \leqq \varepsilon,$$

also

$$(1) \qquad \lambda(\pm\varepsilon) = \lambda'(\pm\varepsilon) = \lambda''(\pm\varepsilon) = \lambda'''(\pm\varepsilon) = 0;$$

die überall (oder „fast überall") definierte Funktion $\mu(t)$ besitze die Periode 2π und für $\varepsilon \leqq t \leqq 2\pi - \varepsilon$ eine stetige dritte Ableitung. Dann gibt es eine Konstante γ, so daß

$$\left|\int_0^{2\pi} \lambda(t)\mu(t) \frac{\cos}{\sin} nt\,dt\right| \leqq \frac{\gamma}{n^3} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Beweis. Es besitzt die überall definierte Funktion $\psi(t) = \lambda(t)\mu(t)$ die Periode 2π und, mit Rücksicht auf (1), eine stetige dritte Ableitung. Daher ergibt sich die Behauptung durch dreimalige partielle Integration unmittelbar.

Hilfssatz 2. Es seien die Voraussetzungen des vorigen Hilfssatzes erfüllt; weiter sei $|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \to 0$, so daß

$$(2) \qquad F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^2} \cos(nx - k_n)$$

eine überall stetige Funktion mit der Periode 2π ist. Wenn dann m ganzzahlig $\to \infty$, so ist

$$J_m(x) = m^2 \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} F(x+t)\,\lambda(t)\,\mu(t) \frac{\cos}{\sin} mt\,dt \to 0,$$

gleichmäßig für alle x [7]).

---

[7]) Für einfache Konvergenz in allem Wesentlichen bei Riemann, a. a. O., Art. 8, Lehrsatz 3. Aus der hier hinzutretenden Gleichmäßigkeit fließt dieselbe im folgenden Satze des Textes ohne weiteres.

Es würde genügen, $\lambda''(t)$ vorhanden und schwankungsbeschränkt anzunehmen (Lebesgue, a. a. O., S. 115, Absatz 2'), doch ist dies nebensächlich, da $\lambda(t)$ in unserer Willkür steht.

Beweis. Wird $k = 0$ oder $\frac{1}{2}\pi$ gesetzt, so ist nach Definition von $\lambda(t)$

$$J_m(x) = m^2 \int_0^{2\pi} F(x+t)\,\lambda(t)\,\mu(t)\cos(mt-k)\,dt.$$

Ferner konvergiert in

$$F(x+t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^2}\cos(nt - x_n) \qquad (x_n = k_n - nx)$$

die Reihe gleichmäßig für alle t, so daß

$$-J_m(x) = m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^2} \int_0^{2\pi} \lambda(t)\,\mu(t)\cos(mt-k)\cos(nt-x_n)\,dt$$

$$= m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{2n^2} \int_0^{2\pi} \lambda(t)\,\mu(t)\left\{\cos((m+n)\,t - x_n') + \cos((m-n)\,t - x_n'')\right\} dt.$$

Daher gilt nach Hilfssatz 1, wenn $\varepsilon_n = 2\gamma\cdot|c_n|$ gesetzt wird (also $\varepsilon_n \to 0$), für alle $m = 1, 2, 3, \ldots$ und gleichmäßig für alle x die Ungleichung

$$|J_m(x)| \leqq m^2 \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\varepsilon_n}{n^2\,|m-n|^3} + \text{konst.}\,|c_m|,$$

wobei der Apostroph bedeutet, dass in der Summe das Glied $n = m$ fehlt. Für die Summe gilt die Abschätzung

$$m^2 \sum{}' = m^2 \sum_{n=1}^{[\frac{1}{2}m]} + m^2 \sum_{[\frac{1}{2}m]+1}^{2m}{}' + m^2 \sum_{2m+1}^{\infty}$$

$$\leqq \frac{m^2}{(\frac{1}{2}m)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^2} + \bar{\varepsilon}_m \frac{m^2}{(\frac{1}{2}m)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3} + \frac{m^2}{m^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^2} \to 0;$$

und da auch konst. $|c_m| \to 0$, ist die Behauptung bewiesen.

Hauptsatz. *Es sei:* $a \leqq b$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\pi$; $\varrho(t)$ *dreimal stetig differentiierbar für* $-2\varepsilon \leqq t \leqq 2\varepsilon$,

$$\varrho(t) = 1 \quad \textit{für} \quad -\varepsilon \leqq t \leqq \varepsilon \text{ [8)]}$$

und

(3) $$\varrho(\pm 2\varepsilon) = \varrho'(\pm 2\varepsilon) = \varrho''(\pm 2\varepsilon) = \varrho'''(\pm 2\varepsilon) = 0;$$

weiter $F(x)$ *durch* (2) *definiert und* $Q_m(t)$ *als überall stetige Funktion festgelegt durch*

$$Q_m(t) = \frac{\sin mt}{\tan\frac{1}{2}t} \quad \textit{für} \quad t \not\equiv 0 \pmod{\pi}.$$

---

8) Hierin weiche ich von den bisherigen Darstellungen ab. Der Grund ist aus Fußnote 12 ersichtlich.

Damit dann die trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n x + b_n \sin n x) \tag{4}$$

mit Koeffizienten $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ *für* $a \leqq x \leqq b$ *gleichmäßig*[9]) *konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß der Ausdruck*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} F(x+t)\,\varrho(t)\,Q_m''(t)\,dt$$

für $a \leqq x \leqq b$ *gleichmäßig*[9]) *gegen einen Grenzwert* $s(x)$ *strebt*[10]).

Beweis. Statt der m-ten Partialsumme

$$\sum_{n=1}^{m}(a_n \cos n x + b_n \sin n x)$$

genügt es wegen $a_m \to 0$, $b_m \to 0$ offenbar, den Ausdruck

$$s_m(x) = \sum_{n=1}^{m}{}'(a_n \cos n x + b_n \sin n x)$$

zu betrachten, wo der Strich bedeutet, daß von dem letzten Glied nur die Hälfte aufzunehmen ist[11]). Dann ist

$$s_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x+t)\sum_{n=1}^{m}{}'(-n^2 \cos n t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x+t)\,Q_m''(t)\,dt.$$

Wird nun die Funktion $\varrho(t)$ für $2\varepsilon \leqq t \leqq 2\pi - 2\varepsilon$ gleich Null definiert und im übrigen mit der Periode 2π fortgesetzt, so erfüllt $\lambda(t) = 1 - \varrho(t)$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 (stetiger Anschluß der Ableitungen für $t = \pm 2\varepsilon$ durch (3) gesichert), und es ist

$$s_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} F(x+t)\,\varrho(t)\,Q_m''(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} F(x+t)\,\lambda(t)\,Q_m''(t)\,dt.$$

Von dem zweiten Teil $\bar{s}_m(x)$ zeigen wir leicht, daß er, sogar für alle x, gleichmäßig gegen Null strebt[12]). Es ist nämlich $\varphi(t) = \frac{1}{\tan \frac{1}{2} t}$ für

---

[9]) Dies Wort ist unnötig, falls $a = b$.

[10]) Für einfache Konvergenz bei Riemann, a. a. O., Art. 9, Absatz III.

[11]) Auch für die Theorie der Fourierreihen empfehlenswert.

[12]) Dieser Nachweis ist durch unsere Festsetzung, daß $\varrho(t)$ in einem ganzen *Intervall* um $t = 0$, und *nicht nur in diesem Punkte* gleich 1 sein soll, gegenüber dem Bisherigen sehr abgekürzt. Insbesondere ist es nicht nötig, zur Diskussion von $\bar{s}_m(x)$ verschiedenerlei Integrale zu betrachten wie Lebesgue, a. a. O., S. 118, 119 (vgl. die Fußnote S. 119), oder Hobson, a. a. O., S. 741 unten, S. 742 oben.

Dagegen ist es nebensächlich, daß wir über $\varrho''''(t)$ nichts voraussetzen, da ja $\varrho(t)$ in unserer Willkür steht.

$\varepsilon \leqq t \leqq 2\pi - \varepsilon$ beliebig oft differentiierbar, infolgedessen daselbst

$$Q_m''(t) = -m^2\varphi(t)\sin mt + 2m\varphi'(t)\cos mt + \varphi''(t)\sin mt,$$

und jede der Funktionen $-\varphi(t)$, $2\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$ eine Funktion $\mu(t)$ im Sinne des Hilfssatzes 1. Es wird also

$$\bar{s}_m(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\alpha=0}^{2} m^\alpha \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} F(x+t)\,\lambda(t)\,\mu_\alpha(t) {\cos \atop \sin} mt\,dt,$$

und es strebt jedes der drei Integrale nach Hilfssatz 2 für alle x gleichmäßig nach Null; w. z. b. w.

Hilfssatz 3. Ist $a \leqq b$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\pi$,

$$F(x) = A + Bx \quad \text{für} \quad a - 2\varepsilon \leqq x \leqq b + 2\varepsilon,$$

und erfüllt $\varrho(t)$ die Voraussetzungen des vorigen Satzes, so ist

$$\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} F(x+t)\,\varrho(t)\,Q_m''(t)\,dt \to 0$$

gleichmäßig[9]) für $a \leqq x \leqq b$[13]).

Beweis. Klar.

Riemanns Lokalisationssatz[14]). *Wenn zwei trigonometrische Reihen, deren Koeffizienten nach Null streben, für* $a - 2\varepsilon \leqq x \leqq b + 2\varepsilon$ (*wo* $a \leqq b$, $\varepsilon > 0$ *und ohne Beschränkung der Allgemeinheit* $< \frac{1}{2}\pi$) *durch Riemannsche Summation dieselbe Summe* $f(x)$ *zugehört, und wenn für* $a \leqq x \leqq b$ *die eine der beiden Reihen gleichmäßig*[9]) *konvergiert, so desgleichen die andere*[15]).

Beweis. Es genügt (nach dem für einfache Konvergenz bekannten Vorbilde) zu zeigen, daß die Differenz beider Reihen für $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig konvergiert. Nun ist diese Differenz eine trigonometrische Reihe mit Koeffizienten $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ und hat im Intervall $(a - 2\varepsilon,\ b + 2\varepsilon)$ die Riemannsche Summe 0, d. h. es ist für die ihr kraft (2) zugehörende stetige Funktion $F(x)$

$$\frac{F(x+2h) - 2F(x) + F(x-2h)}{4h^2} \to 0,$$

[13]) Vgl. Riemann, a. a. O. zu Ende des Art. 9.

[14]) Diese Bezeichnung entnehme ich der sehr lesenswerten Arbeit des Herrn A. Rajchman, O Riemann'owskiej „zasadzie umiejscowienia" (Sur le principe de localisation de Riemann); C. R. Soc. Scientif. de Varsovie 9 (1918), S. 115 bzw. 149. Riemanns Satz wird darin auf neue Art bewiesen und (für Cesàrosche statt Riemannsche Summation) verallgemeinert.

[15]) Für einfache Konvergenz bei Riemann, a. a. O., Art. 10. Vgl. auch Lebesgue, a. a. S., S. 120.

also $F(x) = A + Bx$ für $a - 2\varepsilon \leqq x \leqq b + 2\varepsilon$. Nach Hilfssatz 3 und dem Hauptsatz resultiert daraus die gleichmäßige Konvergenz der Differenzreihe für $a \leqq x \leqq b$; w. z. b. w.

Hilfssatz 4. Wenn $f(x)$ eine mod 2π periodische, über $(0,2\pi)$ Lebesgue-integrierbare Funktion und

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$$

ist, so gilt für die zur Fourierreihe von $f(x)$ kraft (2) gehörige periodische Funktion $F(x)$ der Ausdruck

$$F(x) = \int_0^x du \int_0^u f(t)\,dt + Cx + D'. \tag{5}$$

Beweis. Klar.

Satz von Hobson[16]). *Ist $f(x)$ eine mod 2π periodische, über $(0,2\pi)$ Lebesgue-integrierbare Funktion, so hängt die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe von $f(x)$ in dem abgeschlossenen Intervall (a, b) nur ab von den Werten der Funktion $f(x)$ in einem Intervall $(a - 2\varepsilon, b + 2\varepsilon)$, wo $\varepsilon > 0$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $< \frac{1}{2}\pi$ und im übrigen beliebig ist.*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ an, so daß Formel (5) gilt. Setzen wir nun $a + b = 2c$ und zerlegen das in (5) auftretende iterierte Integral nach dem Schema

$$\int_0^x \int_0^u = \int_0^c \int_0^u + \int_c^x \int_0^c + \int_c^x \int_c^u,$$

so ergibt sich mit passenden Konstanten A, B

$$F(x) = (A + Bx) + \int_c^x du \int_c^u f(t)\,dt.$$

Es besteht also der entscheidende Ausdruck des Hauptsatzes aus zwei Teilen; der erste von $A + Bx$ stammende Teil strebt nach Hilfssatz 3 in (a, b) gleichmäßig nach Null; der zweite, von dem Doppelintegral herrührende Teil hängt offensichtlich nur von den Werten der Funktion $f(t)$ im Intervall $(a - 2\varepsilon, b + 2\varepsilon)$ ab; w. z. b. w.[17]).

---

[16]) On the uniform convergence of Fourier's series; Proc. Lond. Math. Soc. (2) 5 (1907), S. 275; vgl. S. 282. Der leichteren Zugänglichkeit wegen zitiere ich auch: The theory of functions of a real variable ..., § 459, Abs. (2).

[17]) Im vorliegenden Zusammenhang sei noch bemerkt, daß das hiermit bewiesene Resultat erlaubt, einen anderen Satz des Herrn Hobson (Theory of functions . . ., § 459, Abs. (3)) auf ähnliche Weise zu begründen, wie es Herr Hardy (Theorems

Ein Satz über die gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises[18]). *Es sei* $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, *also*

$$(6) \qquad f(r,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n \qquad (0 \leqq r < 1)$$

der Real- oder Imaginärteil einer im Einheitskreise konvergenten Potenzreihe[19]), $a \leqq b < a + 2\pi$[20]), *sowie* $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}(a + 2\pi - b) \leqq \frac{1}{2}\pi$. *Weiter konvergiere* $f(r,x)$ *für* $a' = a - 2\varepsilon \leqq x \leqq b + 2\varepsilon = b'$ (*wo also* $b' < a' + 2\pi$) *bei* $r \to 1$ *ausnahmslos gegen eine Lebesgue-integrierbare Randfunktion* $f(x)$ *in solcher Weise, daß*

$$(7) \qquad \int_{a'}^{x} f(r,t)\,dt \to \int_{a'}^{x} f(t)\,dt, \quad \textit{gleichmäßig für } a' \leqq x \leqq b'.$$

---

relating to the summability and convergence of slowly oscillating series; Proc. Lond. Math. Soc. (2) **8** (1910), S. 301; vgl. § 6, Absatz (ii)) für Dirichlets klassischen Konvergenzsatz aus der Theorie der Fourierreihen ausgeführt hat. Jener Hobsonsche Satz lautet:

Wenn eine mod 2π periodische, über $(0, 2\pi)$ Lebesgue-integrierbare Funktion $f(x)$ für jedes der Ungleichung $a \leqq x \leqq b$ genügende x nach beiden Seiten stetig und in einem Intervall $(a - 2\varepsilon,\ b + 2\varepsilon)$ schwankungsbeschränkt ist, so ist die Fourierreihe von $f(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig[9]) konvergent.

Beim Beweise dürfen wir zunächst $b - a < 2\pi$ voraussetzen (sonst zerlege man (a, b) in endlich viele Teile), sodann ε so klein annehmen, daß $b + 2\varepsilon < a - 2\varepsilon + 2\pi$ ist, und endlich nach dem im Text bewiesenen Satze von Hobson $f(x)$, unter Aufrechterhaltung der Periodizität, in $(b + 2\varepsilon,\ a - 2\varepsilon + 2\pi)$ so zu einer Funktion $f_1(x)$ abändern, daß $f_1(x)$ im ganzen Intervall $(0, 2\pi)$ schwankungsbeschränkt ist. Bei der Funktion $f_1(x)$ ist nun die Fourierreihe in (a, b) nach Herrn Fejér gleichmäßig summierbar durch arithmetische Mittel erster Ordnung, während die Fourierkonstanten $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ sind. Aus beiden Tatsachen folgert man nach dem von Herrn Hardy (a. a. O., § 3) für den Fall der einfachen Konvergenz gegebenen Vorbilde mühelos die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe von $f_1(x)$ im Intervall (a, b), wie bereits Herr Steinhaus festgestellt hat: O pewnym szeregu potęgowym ... (Sur une série entière ...); C. R. Soc. Scientif. de Varsovie **6** (1913), S. 357 bzw. 367; vgl. S. 364 unten.

[18]) Derselbe findet sich bei Herrn M. Riesz: Ausgesprochen für den Fall der Summierbarkeit in einem Punkte durch arithmetische Mittel positiver Ordnung in der Note: Sur les séries de Dirichlet et les séries entières; Comptes Rendus **149** (1909), S. 909; vgl. Absatz 4°. Angedeutet für den Fall der Konvergenz in einem Punkte in der Arbeit: Über einen Satz des Herrn Fatou; Journ. f. Math. **140** (1911), S. 89; vgl. S. 94, Fußnote.

[19]) Falls deren Konvergenzradius > 1, ist der Satz ohne Interesse.

[20]) Falls die ganze Einheitsperipherie in Frage kommt, so zerlege man sie in die Teilbögen $0 \leqq x \leqq \pi$ und $\pi \leqq x \leqq 2\pi$.

Übrigens ist der Satz (mit den nötigen Änderungen) dann trivial.

Wird dann $f(x)$ für $b' < x < a' + 2\pi$ irgendwie zu einer über $(0, 2\pi)$ Lebesgue-integrierbaren Funktion ergänzt und diese mod 2π periodisch fortgesetzt, so ist zur gleichmäßigen[9]) *Konvergenz der Reihe aus* (6) *auf dem Randstück $r = 1$, $a \leqq x \leqq b$ notwendig und hinreichend die gleichmäßige Konvergenz*[21]) *der Fourierreihe der Funktion $f(x)$ für dieselben x.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $a' = 0$ an, sowie, daß in der Fourierreihe von $f(x)$ das konstante Glied verschwindet.

Nach dem Hauptsatz hängt die in Frage stehende gleichmäßige Konvergenz der Reihe aus (6) nur ab von den Werten der Funktion

$$F(1, x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n x + b_n \sin n x}{n^2} \quad \text{für} \quad 0 = a' \leqq x \leqq b',$$

diejenige der Fourierreihe von $f(x)$ wegen Hilfssatz 4 nur von denen der Funktion

$$F(x) = \int_0^x du \int_0^u f(t)\, dt + C x + D \quad \text{für} \quad 0 = a' \leqq x \leqq b'.$$

Nun ist, z. B. nach Hilfssatz 4, für $0 < r < 1$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n x + b_n \sin n x}{n^2} r^n = \int_0^x du \int_0^u f(r, t)\, dt + C(r) \cdot x + D(r).$$

Hierin strebt bei $r \to 1$ die linke Seite für alle x gegen $F(1, x)$, das Integral rechts wegen (7) für $0 = a' \leqq x \leqq b'$ gegen $\int_0^x du \int_0^u f(t)\, dt$; also resultiert zunächst für $x = 0$ bzw. b', daß $D(r)$ und $C(r)$ gegen bestimmte Grenzwerte konvergieren, und weiter, daß

$$F(1, x) = F(x) + (A + B x) \quad \text{für} \quad 0 = a' \leqq x \leqq b'.$$

Wegen Hilfssatz 3 folgt daher die Behauptung ohne weiteres aus unserem Hauptsatz.

Abschnitt II.

Eine von Herrn M. Riesz gestellte Frage.

§ 1.

Gegen Ende seiner Arbeit *Über summierbare trigonometrische Reihen*[22]) sagt Herr M. Riesz:

[21]) Diese ist nach dem vorigen Satz unabhängig von den zur Ergänzung von $f(x)$ verwendeten Werten.

[22]) Math. Ann. 71 (1912), S. 54; vgl. S. 74 unten.

„An jeder Stelle ist nicht nur die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx), \tag{37}$$

sondern auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n\alpha_n \cos nx + n\beta_n \sin nx) \tag{38}$$

konvergent. Ob daraus die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (37) folgt, kann ich nicht entscheiden."

Indem wir $n\alpha_n = a_n$, $n\beta_n = -b_n$ schreiben und den Faktor $\frac{1}{n}$, den das n-te Glied von (38) beim Übergang zu (37) erhält, durch $\frac{1}{m_n}$ ersetzen, wo

$$0 < m_n \leqq m_{n+1} \to \infty \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

gelangen wir zu der folgenden etwas *allgemeineren Fragestellung*:

Es sei die trigonometrische Reihe

$$\mathfrak{T}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx - b_n \sin nx)$$

für alle reellen x ausnahmslos konvergent, also desgleichen die Reihe

$$\mathfrak{T}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \cos nx - b_n \sin nx}{m_n}.$$

Was läßt sich dann über die *gleichmäßige* Konvergenz der letzteren Reihe aussagen?

Zunächst ist es trivial, daß, wenn $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m_n}$ konvergiert, die Reihe $\mathfrak{T}_0(x)$ bei jeder Wahl von $\mathfrak{T}(x)$ auf der ganzen reellen Achse gleichmäßig konvergiert.

Wenn dagegen über die m_n nur die Beziehung (1) vorausgesetzt wird, so läßt sich immerhin beweisen, daß bei jeder Wahl von $\mathfrak{T}(x)$ die zugehörige Reihe $\mathfrak{T}_0(x)$ in jedem Intervall (a, b) ein Teilintervall (α, β) gleichmäßiger Konvergenz besitzt, und daß der entsprechende Satz auch für Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise gilt. Dies bildet den Inhalt des § 2.

Nunmehr beschränken wir unsere Betrachtungen erlaubter Weise auf das Intervall $(0, 2\pi)$. Darin gibt es bei einer Reihe beliebiger Funktionen von x zu jedem Intervall (α, β) gleichmäßiger Konvergenz ein eindeutig bestimmtes größtes Intervall (α', β') der Art, daß (α, β) darin enthalten ist und in jedem inneren Teilintervall von (α', β') gleichmäßige Konvergenz

stattfindet. Wir wollen (α', β') ein *Grenzintervall gleichmäßiger Konvergenz* nennen. Offenbar greifen verschiedene Intervalle (α', β') nicht übereinander, können aber aneinanderstoßen.

Aus § 2 folgt daher insbesondere, daß für jede Wahl von $\mathfrak{T}(x)$ bei der Reihe $\mathfrak{T}_0(x)$ im Intervall $(0, 2\pi)$ die Längensumme aller (α', β') positiv (aber natürlich $\leqq 2\pi$) ist[23]), und daß das Entsprechende auch für Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise gilt.

Im § 4 wird nun gezeigt werden, daß vorstehende Resultate nicht verbessert werden können, sobald

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n} \text{ divergiert},$$

indem zu jeder derartigen Folge ein Beispiel $\mathfrak{T}(x)$ angegeben wird, wo bei der Reihe $\mathfrak{T}_0(x)$ im Intervall $(0, 2\pi)$ die Längensumme aller (α', β') beliebig klein ist. Auch wird das Entsprechende für Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise geleistet.

Hierin ist für $m_n = n$ speziell enthalten, daß die ursprüngliche M. Rieszsche Frage mit *Nein* zu beantworten ist, was am Ende dieses Abschnitts durch ein besonders einfaches Beispiel nochmals nachgewiesen werden soll.

Endlich sei darauf hingewiesen, daß die Betrachtungen des vorliegenden Abschnitts große Ähnlichkeit besitzen mit dem Abschnitt VI (Über das Maß der ungleichmäßigen Konvergenz bei ausnahmslos konvergenten Fourier- und Potenzreihen stetiger Funktionen) der Inauguraldissertation[24]) des Verfassers. Dies liegt in der Natur der Sache.

§ 2.

Satz I. *Wenn die Reihe $\mathfrak{T}(x)$ ausnahmslos konvergiert und Beziehung (1) gilt, so besitzt die Reihe $\mathfrak{T}_0(x)$ in jedem Intervall (a, b) ein Teilintervall (α, β) gleichmäßiger Konvergenz.*

Beweis. Wegen der Periodizität der Reihenglieder darf (a, b) ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Teil von $(0, 2\pi)$ angenommen werden.

---

[23]) Da in jedem Innenpunkt eines Intervalls (α', β') das Maß $\beta(x)$ der ungleichmäßigen Konvergenz von $\mathfrak{T}_0(x)$ den Wert Null hat, so ist damit insbesondere gezeigt, daß im Intervall $(0, 2\pi)$ die Menge der Punkte x, wo $\beta(x) = \infty$ ist, stets das Maß $m < 2\pi$ hat. Und es wird sich im § 4 ergeben, daß m seiner oberen Schranke 2π beliebig nahe kommen kann.

Im Text ist die Bezugnahme auf den Begriff des Maßes der ungleichmäßigen Konvergenz *absichtlich* vermieden.

[24]) Zur Konvergenz der trigonometrischen Reihen, einschließlich der Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise; Göttingen 1914, gedruckt 1919.

Nach bekannten Sätzen über Reihen stetiger Funktionen, die in einem Intervall (hier (a, b)) ausnahmslos konvergieren, enthält dasselbe ein Teilintervall (α, β), worin die Partialsummen von $\mathfrak{T}(x)$ gleichbeschränkt sind. Daher und wegen (1) ist die Reihe $\mathfrak{T}(x)$ nach dem Dirichletschen Kriterium gleichmäßig konvergent in (α, β).

Satz II. *Wenn die Potenzreihe*

$$\mathfrak{P}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i b_n) z^n$$

auf dem Einheitskreise ausnahmslos konvergiert und Beziehung (1) *gilt, so besitzt die Potenzreihe*

$$\mathfrak{P}_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + i b_n}{m_n} z^n$$

für $z = e^{ix}$ *in jedem Intervall* $\{a \leqq x \leqq b\}$ *ein Teilintervall* (α, β), *worin sie gleichmäßig konvergiert.*

Beweis. Es ist, wenn $\mathfrak{T}(x)$ und $\mathfrak{T}_0(x)$ ihre alte Bedeutung behalten,

$$\mathfrak{P}(e^{ix}) = \mathfrak{T}(x) + i\bar{\mathfrak{T}}(x), \quad \text{wo} \quad \bar{\mathfrak{T}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx + a_n \sin nx),$$

$$\mathfrak{P}_0(e^{ix}) = \mathfrak{T}_0(x) + i\bar{\mathfrak{T}}_0(x), \quad \text{wo} \quad \bar{\mathfrak{T}}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \cos nx + a_n \sin nx}{m_n}.$$

Nun enthält nach Satz I das Intervall (a, b) ein Teilintervall, worin $\mathfrak{T}_0(x)$ gleichmäßig konvergiert, und dieses (weil darin $\bar{\mathfrak{T}}(x)$ ausnahmslos konvergiert) ein Unterintervall (α, β), worin auch $\bar{\mathfrak{T}}_0(x)$ gleichmäßig konvergiert; daraus die Behauptung.

§ 3.

Bevor wir jetzt an den Nachweis herantreten, daß die vorstehenden Ergebnisse nicht verbessert werden können, sei über Cantors wohlbekannte perfekte, nirgends dichte Punktmenge einiges vorausgeschickt.

Es sei δ eine gegebene Zahl, $0 < \delta < 2\pi$ und $\delta = 4\varepsilon$ gesetzt.

Wir schneiden vom Intervall $(0, 2\pi)$ an jedem Ende ein Stück der Länge ε ab und konstruieren in dem verbleibenden Teilintervall (A, B) von $(0, 2\pi)$ Cantors Menge, indem wir (Schritt 0) aus der Mitte von (A, B) ein offenes Intervall der Länge ε herausnehmen, dann (Schritt 1) aus der Mitte eines jeden der 2^1 verbliebenen Intervalle ein offenes Intervall der Länge $\frac{\varepsilon}{2^1 \cdot 2^1}$, dann (Schritt 2) aus der Mitte eines jeden der 2^2 verbliebenen Intervalle ein offenes Intervall der Länge $\frac{\varepsilon}{2^2 \cdot 2^2}$, usw.

Wir numerieren nun die herausgenommenen Intervalle in der vorgenannten Reihenfolge irgendwie mit $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ und bezeichnen ihre Mittelpunkte mit x_ν, ihre Längen mit $2\gamma_\nu$. Dann werden im nächsten Paragraphen folgende bekannte Tatsachen benutzt:

Die überbleibenden Punkte von (A, B) bilden eine perfekte, nirgends dichte Punktmenge $\mathfrak{M}$, die das Maß $2\pi - \delta$ hat. Die Punkte x_ν sind paarweise verschieden, genügen der Ungleichung

$$A = \varepsilon \leqq x_\nu \leqq 2\pi - \varepsilon = B \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{3}$$

und es ist

$$2\gamma_\nu \leqq \varepsilon < \frac{\pi}{2} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Jeder Punkt x' von $\mathfrak{M}$ ist Häufungspunkt von Punkten x_ν, d. h. es gibt eine Folge ganzer Zahlen $\nu(\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$ der Art, daß

$$\nu(\alpha) \to \infty; \quad \lim_{\alpha = \infty} x_{\nu(\alpha)} = x'. \tag{5}$$

§ 4.

Nach dieser Vorbereitung gestaltet sich die Darstellung unseres Beispiels wie folgt:

Ist δ gemäß § 3 gegeben, $\mathfrak{M}$ die daselbst konstruierte Punktmenge und besteht die Beziehung (2), so werden wir eine Reihe $\mathfrak{P}(e^{ix})$ angeben, die für alle x konvergiert, während die zugehörige Reihe $\mathfrak{P}_0(e^{ix})$, und zwar sogar bereits ihr Realteil $\mathfrak{T}_0(x)$, in keiner zweiseitigen Umgebung eines Punktes x' unserer Menge $\mathfrak{M}$ vom Maße $2\pi - \delta$ gleichbeschränkte Partialsummen hat[25]).

Damit wird dann bewiesen sein, daß kein Punkt x' von $\mathfrak{M}$ Innenpunkt eines der (im § 1 definierten) Grenzintervalle (α', β') gleichmäßiger Konvergenz von $\mathfrak{T}_0(x)$ bzw. $\mathfrak{P}_0(e^{ix})$ sein kann. Alle derartigen Intervalle sind daher Teile der zu $\mathfrak{M}$ komplementären Restintervalle von $(0, 2\pi)$, und da sie nicht übereinander greifen, so muß ihre Längensumme $\leqq \delta$ sein.

Sobald wir also am nachstehenden Beispiel die oben genannten Eigenschaften nachgewiesen haben werden, ist gezeigt, daß weder Satz I noch Satz II verschärft werden kann.

Definition des Beispiels. Es seien Γ_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ positive Zahlen, für welche (mit Benutzung der im § 3 eingeführten Bezeichnungen)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_\nu \gamma_\nu}, \quad \text{also auch} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_\nu} \quad \text{konvergiert}^{26)}. \tag{6}$$

---

[25]) Es ist also $m\{\beta(\alpha) = \infty\} \geqq 2\pi - \delta$, wie in Fußnote [23]) behauptet.

[26]) Da, wie man leicht sieht, $2\gamma_\nu \geqq \varepsilon/\nu^2$ ist, würde es genügen $\Gamma_\nu = \nu^4$ zu setzen. Doch ist es durchsichtiger, die Rechnung in obiger allgemeiner Bezeichnung durchzuführen.

Weiter seien die ganzen Zahlen M_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ monoton wachsend und so definiert, daß

$$(7) \qquad M_1 = 0, \quad \text{und für} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots: \sum_{n=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{1}{m_n} \geqq \nu \cdot \Gamma_\nu,$$

was auf Grund von (2) stets möglich ist.

Alsdann ist unser Beispiel definiert durch die Formel

$$\mathfrak{P}(e^{ix}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_\nu} \sum_{n=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} e^{n(x-x_\nu)i},$$

wo die x_ν aus § 3 bekannt sind.

Nachweis der ausnahmslosen Konvergenz von $\mathfrak{P}(e^{ix})$. Es sei p eine ganze Zahl $\geqq 1$, und $\mu = \mu(p)$ die größte unter den Zahlen ν der Reihe $1, 2, 3, \ldots$, für die $M_\nu < p$ ist, also

$$(8) \qquad M_\mu < p \leqq M_{\mu+1}, \quad \text{woraus} \quad \mu = \mu(p) \to \infty$$

folgt. Es sei ferner (ohne Beschränkung der Allgemeinheit)

$$(9) \qquad 0 \leqq x < 2\pi.$$

Der Punkt x gehört nach § 3 höchstens einem der zur Konstruktion der Menge $\mathfrak{M}$ aus dem Intervall (A, B) herausgenommenen, nicht übereinander greifenden Intervalle (mit den Mitten x_ν und den Längen $2\gamma_\nu$) an; wenn ja, so sei ν' dessen Index, sonst sei $\nu' = 0$. Dann ist wegen (3), (9) und (4)

$$\gamma_\nu \leqq |x - x_\nu| \leqq 2\pi - \varepsilon \leqq 2\pi - \gamma_\nu \qquad (\nu > \nu'),$$

also

$$|e^{(x-x_\nu)i} - 1| = 2\left|\sin\frac{x - x_\nu}{2}\right| \geqq 2 \sin\frac{\gamma_\nu}{2} \geqq 2\,\frac{\gamma_\nu}{\pi} \qquad (\nu > \nu').$$

Bezeichnet daher $S_p(x)$ die p-te Partialsumme von $\mathfrak{P}(e^{ix})$, so ist wegen (8)

$$(10) \qquad S_p(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{1}{\Gamma_\nu} \sum_{n=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} e^{n(x-x_\nu)i} + \frac{1}{\Gamma_\mu} \sum_{n=M_\mu+1}^{p} e^{n(x-x_\mu)i},$$

und wir finden für alle $\mu - 1 > \nu'$, also kraft (8) für alle großen p, daß der zweite Teil von $S_p(x)$, absolut genommen,

$$\leqq \frac{1}{\Gamma_\mu} \cdot \frac{2}{|e^{(x-x_\mu)i} - 1|} \leqq \frac{\pi}{\Gamma_\mu \gamma_\mu}$$

ist, während der erste, von Anfangsgliedern abgesehen, durch

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\mu-1} \frac{1}{\Gamma_\nu} \cdot \frac{2}{|e^{(x-x_\nu)i} - 1|} \leqq \sum_{\nu=\nu'+1}^{\mu-1} \frac{\pi}{\Gamma_\nu \gamma_\nu}$$

majorisiert wird. Daraus geht aber unter nochmaligem Hinblick auf (8), und wegen (6) die Konvergenz von $\mathfrak{P}(e^{ix})$ hervor.

Nachweis, daß der Realteil von $\mathfrak{P}_0(e^{ix})$,

$$\mathfrak{T}_0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma_\nu} \sum_{n=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{\cos n(x - x_\nu)}{m_n},$$

in einer jeden zweiseitigen Umgebung eines jeden Punktes x' von $\mathfrak{M}$ nicht-gleichbeschränkte Partialsummen hat. Wir betrachten die in (5) genannte, zu x' gehörige Folge der $\nu(\alpha)$. Wären nun in einer Umgebung von x' die Partialsummen $s_p(x)$ von $\mathfrak{T}_0(x)$ gleichbeschränkt, etwa $\leqq k$, so müßte angesichts von (5) für $\nu = \nu(\alpha)$ und alle hinlänglich großen α

$$|s_{M_{\nu+1}}(x_\nu) - s_{M_\nu}(x_\nu)| = \frac{1}{\Gamma_\nu} \sum_{n=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{1}{m_n} \leqq 2k$$

sein, was jedoch der Beziehung (7) widerspricht[27]).

Abschnitt III.

Konvergenz trigonometrischer Reihen und Größenordnung der Koeffizienten.

§ 1.

Es sei

$$\mathfrak{T}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

eine trigonometrische Reihe ohne konstantes Glied[28]) und

$$|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

---

[27]) Will man nur die ursprüngliche Rieszsche Frage (vgl. § 1) beantworten, so genügt es, $M_\nu = 2^{\nu^5} - 1$ zu setzen und das Beispiel

$$\mathfrak{P}(e^{ix}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} \sum_{n=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} e^{n(x-1/\nu)i}$$

zu betrachten. Dessen Konvergenz ergibt sich genau wie oben, während bei

$$\mathfrak{T}_0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} \sum_{n=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{\cos n(x - 1/\nu)}{n}$$

die ungleichmäßige Konvergenz im Intervall $(0, 2\pi)$ daraus folgt, daß im Punkte $x = 1/\nu$ die Sequenz

$$\frac{1}{\nu^3} \cdot \sum_{n=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{\nu^3} \cdot \log \frac{M_{\nu+1}+1}{M_\nu+1} = \frac{\log 2}{\nu^3}((\nu+1)^5 - \nu^5) \sim \nu.$$

[28]) Dasselbe ist bei Untersuchungen über Konvergenz und Divergenz Nebensache.

Dann verdankt man Herrn Plancherel als letztes Glied einer längeren Kette[29]) den Satz:

$$(1)\qquad \begin{cases} \textit{Die Reihe } \mathfrak{T}(x) \textit{ divergiert im Intervall } (0, 2\pi) \\ \textit{höchstens in einer Menge vom Maße Null,} \end{cases}$$

wenn für $\alpha = 3$ *die Reihe*

$$(2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^{\alpha} \cdot |c_n|^2 \textit{ konvergiert.}$$

Es scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein, daß dieser Satz *auch noch für* $\alpha = 2$ seine Richtigkeit behält: Da nämlich in diesem Falle die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n \log n)^2 + (b_n \log n)^2\}$$

konvergiert, bilden die Zahlen

$$\alpha_n = a_n \log n, \qquad \beta_n = b_n \log n$$

die Fourierkonstanten einer (sogar quadratisch) nach Lebesgue integrierbaren Funktion, weshalb dann nach einem Satze des Herrn Hardy[30]) die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx}{\log n}, \text{ d. h. } \mathfrak{T}(x)$$

fast überall konvergiert. (Vgl. hierzu den Zusatz am Schluß.)

Nun ist es eine interessante Frage, ob im obigen Satze unbeschadet seiner Richtigkeit der Wert von α noch weiter verkleinert werden kann. Zur Beantwortung dieser Frage liefert der vorliegende Abschnitt einen Beitrag, indem gezeigt wird, daß *Werte* $\alpha < 0$ *ausgeschlossen* sind, so daß also die Frage nur noch für die Werte des Intervalls $0 \leqq \alpha < 2$ offen bleibt.

Allgemeiner werden wir (vgl. § 3) beweisen, daß bei $0 < \lambda_n \to \infty$ die Voraussetzung

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} |c_n|^2 \text{ konvergiert}$$

nicht ausreicht für (1).

---

[29]) P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor; Acta Math. **30** (1906), S. 335; vgl. S. 379, [§] 4 und Fußnote 1.

F. Jerosch und H. Weyl, Über die Konvergenz von Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten; Math. Ann. **66** (1909), S. 67.

H. Weyl, Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten; Math. Ann. **67** (1909), S. 225.

M. Plancherel, Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales; C. R. **157** (1913), S. 539.

[30]) On the summability of Fourier's series; Proc. Lond. Math. Soc. (2) **12** (1913), S. 365; vgl. S. 370, Theorem 3.

§ 2.

Ehe wir nun daran gehen, den Weg auseinanderzusetzen, auf dem der angekündigte Beweis erbracht werden wird, seien noch einige Bezeichnungen eingeführt:

Es ist für unsere Betrachtungen erforderlich, neben der Reihe $\mathfrak{T}(x)$ noch die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad \text{mit} \quad c_n = a_n - i b_n$$

heranzuziehen, deren Realteil auf dem Einheitskreise $z = e^{ix}$ jene ist, und zweckmäßig, in beiden Reihen die „Koeffizientenbeträge" $|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ in Evidenz zu bringen, indem man für $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt

$$c_n = |c_n| \cdot e^{-n x_n i}, \quad \text{also} \quad a_n = |c_n| \cdot \cos n x_n, \qquad b_n = |c_n| \sin n x_n,$$

wobei $n x_n$ unbestimmt bleibe mod 2π bzw., falls $c_n = 0$, ganz beliebig. Dann wird die Reihe

$$\mathfrak{P}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \, e^{-n x_n i} z^n,$$

und für $z = e^{ix}$ deren Komponenten

$$\mathfrak{T}(x) = \Re\, \mathfrak{P}(e^{ix}) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cos n (x - x_n),$$

$$\overline{\mathfrak{T}}(x) = \Im\, \mathfrak{P}(e^{ix}) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cos n (x - x_n'),$$

wobei $n x_n' \equiv n x_n + \frac{1}{2}\pi \pmod{2\pi}$.

§ 3.

Wir werden nun im § 4 zu jeder Folge $|c_n|$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, für welche

(4) $|c_n|^2 \geqq d_n$ gilt, wo $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ eine divergente Reihe mit positiven, niemals zunehmenden Gliedern ist,

eine mit diesen Koeffizientenbeträgen $|c_n|$ gebildete Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ angeben[31]), die auf dem Einheitskreis ausnahmslos divergiert[32]), oder gar daselbst in keinem Punkte beschränkte Partialsummen hat.

[31]) Das Vorbild der dabei benutzten Konstruktion hat Herr N. Lusin gegeben: Über eine Potenzreihe, Rendic. Circ. Mat. di Pal. 32 (1911), S. 386.

[32]) Es gibt nachweislich *nicht zu jeder* Folge $|c_n|$, für welche $\sum |c_n|^2$ divergiert, eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ mit der oben genannten Eigenschaft. Vielmehr gibt es unter

Dann sind die beiden Komponenten $\mathfrak{T}(x)$ und $\bar{\mathfrak{T}}(x)$ von $\mathfrak{P}(e^{ix})$ mit jenen selben $|c_n|$ gebildete trigonometrische Reihen (s. oben), von denen wenigstens eine in einer Menge vom Maße $\geqq \pi$ divergiert bzw. nirgendsbeschränkte Partialsummen hat. Womit also gezeigt ist, daß immer dann, wenn für eine Folge $|c_n|$ die Aussage (4) zutrifft, für die mit diesen $|c_n|$ gebildeten Reihen $\mathfrak{T}(x)$ die Behauptung (1) nicht allgemein gilt[33]).

Zum Beweise des am Ende von § 1 angekündigten Resultats genügt daher der Nachweis, daß wir imstande sind, bei gegebener Folge $0 < \lambda_n \to \infty$ die Koeffizientenbeträge $|c_n|$ so zu wählen, daß einerseits (3) erfüllt ist und andererseits die Aussage (4) zutrifft, weil dann nach dem soeben Gesagten die Behauptung (1) nicht allgemein gilt. Dieser Nachweis wird im § 5 erbracht werden.

§ 4.

Zu jeder Folge von Koeffizientenbeträgen $|c_n|$, für welche $|c_n|^2 \geqq d_n$ gilt, wo $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ eine divergente Reihe mit positiven, nie zunehmenden Gliedern ist, gibt es eine mit ihnen gebildete Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$, die auf dem Einheitskreise überall divergiert.

Bedeuten die M_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ solche noch zu bestimmenden

---

diesen Koeffizientenbeträgen solche, daß jede mit ihnen gebildete Reihe $\mathfrak{P}(z)$ auf jedem Teilbogen des Einheitskreises kontinuierlich viele Konvergenzpunkte besitzt.

Ein Beispiel für diese Merkwürdigkeit ist die Folge

$$|c_n| = 1/\sqrt{\nu} \quad \text{für} \quad n = (\nu-1)! \quad \text{und} \quad \nu = 2, 3, \ldots; \qquad |c_n| = 0 \text{ sonst.}$$

Hierbei hat jede zugehörige Reihe $\mathfrak{P}(z)$ auf dem Rande des Einheitskreises die Gestalt

$$\mathfrak{P}(e^{ix}) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}} e^{(\nu-1)!(x-\xi_\nu)i}.$$

Drückt man nun $x/2\pi$ und die gegebenen $\xi_\nu/2\pi$ in der „systematischen" Form $\sum \alpha_\mu/\mu!$ aus $(0 \leqq \alpha_\mu < \mu)$, so findet man nach elementarer Rechnung Zahlen x in der behaupteten Lage und Häufigkeit, für welche

$$e^{(\nu-1)!(x-\xi_\nu)i} = e^{(\nu+1)\pi i + O(1/\nu)} = (-1)^{\nu+1} + O(1/\nu),$$

also $\mathfrak{P}(e^{ix})$ konvergent wird.

[33]) Es wäre zweifellos im vorliegenden Zusammenhang abschließender, wenn es gelänge, zu jeder Folge $|c_n|$ mit divergenter Quadratsumme eine zugehörige Reihe $\mathfrak{T}(x)$ anzugeben, die in einer Menge positiven Maßes divergiert. Doch würde ein solches Ergebnis der Bedeutung unserer Potenzreihenbeispiele, die ja ausnahmlose Divergenz von $\mathfrak{P}(e^{ix})$ aufweisen, angesichts der vorigen Fußnote keinen Eintrag tun.

ganzen Zahlen, die von $M_0 = 0$ an monoton, also gegen ∞, wachsen, so lautet unser Beispiel

$$\mathfrak{P}(e^{ix}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=M_{\nu-1}+1}^{M_\nu} |c_n| \cdot e^{n(x-\xi_\nu)i}, \quad \text{wo} \quad \xi_\nu = \sum_{\nu'=1}^{\nu} \frac{\pi/3}{M_{\nu'} - M_{\nu'-1}}.$$

a) Definition und Eigenschaften der M_ν. Wegen der Voraussetzungen über die d_n ist $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{d_n}$ divergent, so daß für jedes ν der Reihe $1, 2, 3, \ldots$ und nach Festlegung von $M_0 = 0, M_1, \ldots, M_{\nu-1}$ eine ganze Zahl M_ν existiert der Art, daß

$$\sum_{n=M_{\nu-1}+1}^{M_\nu} \sqrt{d_n} \geqq 1, \quad \text{aber} \quad \sum_{n=M_{\nu-1}+1}^{M_\nu - 1} \sqrt{d_n} < 1.$$

Dann haben die M_ν alle genannten Eigenschaften, und es ist

$$\sum_{n=M_\nu+1}^{M_{\nu+1}} d_n \leqq (1+\sqrt{d_1})\sqrt{d_{M_\nu}} \leqq \frac{1+\sqrt{d_1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} \sum_{n=M_{\nu-1}+1}^{M_\nu} \sqrt{d_n} \leqq \frac{(1+\sqrt{d_1})^2}{M_\nu - M_{\nu-1}},$$

also

$$(5) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{M_\nu - M_{\nu-1}} \text{ divergent.}$$

b) Divergenzbeweis für $\mathfrak{P}(e^{ix})$. Es sei

$$\Omega_\nu(x) = \left| \sum_{n=M_{\nu-1}+1}^{M_\nu} |c_n| \cdot e^{n(x-\xi_\nu)i} \right| = \left| \sum_{n=M_{\nu-1}+1}^{M_\nu} |c_n| \cdot e^{(n-M_{\nu-1})(x-\xi_\nu)i} \right|$$

Für

$$|x - \xi_\nu| \leqq \frac{\pi/3}{M_\nu - M_{\nu-1}}$$

ist dann

$$\Omega_\nu(x) \geqq \sum_{n=M_{\nu-1}+1}^{M_\nu} |c_n| \cdot \cos(n - M_{\nu-1})(x - \xi_\nu) \geqq \frac{1}{2} \sum_{n=M_{\nu-1}+1}^{M_\nu} \sqrt{d_n} \geqq \frac{1}{2}.$$

Sei jetzt x fest, wo $0 \leqq x < 2\pi$, und die Divergenz von $\mathfrak{P}(e^{ix})$ zu beweisen. Wegen (5) gibt es zu jedem $k = 0, 1, 2, \ldots$ einen Index $\nu = \nu(k)$ der Art, daß

$$\sum_{\nu=1}^{\nu(k)-1} \frac{\pi/3}{M_\nu - M_{\nu-1}} < x + 2k\pi \leqq \sum_{\nu=1}^{\nu(k)} \frac{\pi/3}{M_\nu - M_{\nu-1}} = \xi_{\nu(k)}$$

ist; bei $k \to \infty$ ist $\nu(k)$, also auch $M_{\nu(k)-1} \to \infty$. Wäre also x Konver-

genzpunkt von $\mathfrak{P}(e^{ix})$, so müßte $\Omega_{\nu(k)}(x) \to 0$ bei $k \to \infty$, während tatsächlich

$$|(x + 2k\pi) - \xi_{\nu(k)}| \leqq \frac{\pi/3}{M_{\nu(k)} - M_{\nu(k)-1}},$$

und daher für alle k

$$\Omega_{\nu(k)}(x) = \Omega_{\nu(k)}(x + 2k\pi) \geqq \frac{1}{2}$$

ist[34]).

§ 5.

Nachweis, daß wir bei gegebener Zahlenfolge λ_n, wo

$$0 < \lambda_n \to \infty \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

die Zahlen $|c_n|$ so wählen können, daß die Bedingungen (3) *und* (4) *zugleich erfüllt sind.*

Zum Beweise genügt es offenbar (da es auf endlich viele Anfangsglieder nicht ankommt), $\lambda_n \geqq 1$ vorauszusetzen und dann Zahlen $M_0 = 0$, M_1, $M_2, \ldots$ anzugeben der Art, daß für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$0 < M_n \leqq \sqrt{\lambda_n}, \qquad M_n \to \infty, \qquad M_n - M_{n-1} \geqq M_{n+1} - M_n > 0.$$

Denn dann haben,

$$|c_n|^2 = d_n = M_n - M_{n-1}$$

gesetzt, die Zahlen $|c_n|$ die in (4) genannten Eigenschaften[35]), während andererseits

$$\frac{1}{\lambda_n}|c_n|^2 \leqq \frac{M_n - M_{n-1}}{M_n^2},$$

also[35]) auch Bedingung (3) erfüllt ist.

Nun sei zwecks Definition der M_n zunächst $n_0 = 0$. Darauf lassen sich der Reihe nach die ganzen Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ so bestimmen, daß

$$\begin{array}{lll} n_1 - n_0 \geqq 1 & \text{und für} & n \geqq n_1: \ \sqrt{\lambda_n} \geqq 2, \\ n_2 - n_1 \geqq n_1 - n_0 & \text{und für} & n \geqq n_2: \ \sqrt{\lambda_n} \geqq 3, \\ n_3 - n_2 \geqq n_2 - n_1 & \text{und für} & n \geqq n_3: \ \sqrt{\lambda_n} \geqq 4, \end{array}$$

usw. Dann werde gesetzt

$$M_n = (\nu - 1) + \frac{n - n_{\nu-1}}{n_\nu - n_{\nu-1}} = \varphi_\nu(n) \text{ für } n_{\nu-1} \leqq n < n_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

[34]) Nach bekannten Vorbildern kann leicht erreicht werden, daß die Partialsummen von $\mathfrak{P}(e^{ix})$ *nirgends beschränkt* sind.

[35]) A. Pringsheim, Allgemeine Theorie der Divergenz und Konvergenz von Reihen mit positiven Gliedern; Math. Ann. **35** (1890), S. 297; vgl. Lehrsatz I bzw. III.

so daß $M_0 = 0$ und für $n \geqq 1$ auch $0 < M_n \leqq \sqrt{\lambda_n}$, sowie $M_n \to \infty$ unmittelbar ersichtlich ist. Ferner hat man

$$M_{n_\nu} = \varphi_{\nu+1}(n_\nu) = \nu = \varphi_\nu(n_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

also

$$(6) \quad M_n - M_{n-1} = \frac{1}{n_\nu - n_{\nu-1}} > 0 \quad \text{für} \quad n_{\nu-1} < n \leqq n_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

woraus für $n = n_\nu$ folgt

$$M_n - M_{n-1} = \frac{1}{n_\nu - n_{\nu-1}} \geqq \frac{1}{n_{\nu+1} - n_\nu} = M_{n+1} - M_n,$$

während dieselbe Ungleichung für $n_{\nu-1} < n < n_\nu$ aus (6) unmittelbar abzulesen ist. W. z. b. w.

Göttingen, 17. Oktober 1920.

(Eingegangen 31. 12. 1920.)

Zusatz zu Abschn. III, § 1, Abs. 2: Dieselbe Bemerkung hat, wie mir bei der Korrektur Herr Rademacher mitteilt, bereits Herr Hobson gemacht, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **14** (1915) auf S. 429 (dieser Band ist bis jetzt in keiner hiesigen öffentlichen Bibliothek vorhanden).

Über wiederholbare Funktionen.

Von

Rudolf Schauffler in Berlin-Wilmersdorf.

Die Funktion $f(x)$ sei

(V_1) stetig für $a \leqq x \leqq b$ (wobei $a < b$)

und es sei

(V_2) $a \leqq f(x) \leqq b$ für $a \leqq x \leqq b$.

Ferner werde gesetzt:

$$f_0(x) = x, \qquad f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Durch die Voraussetzung (V_2) ist die Existenz der Funktionen $f_n(x)$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ für $a \leqq x \leqq b$ gewährleistet. Wir bezeichnen eine Funktion dann und nur dann als *für $a \leqq x \leqq b$ wiederholbar*, wenn sie (V_2) erfüllt.

Wir bezeichnen als *Fixstellen* von $f(x)$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = x$; $f(x)$ hat unter den Voraussetzungen (V_1) und (V_2) für $a \leqq x \leqq b$ mindestens eine Fixstelle. Wir nehmen an,

(V_3) $f(x)$ habe für $a \leqq x \leqq b$ nur *eine* Fixstelle, und zwar die Stelle $x = c$,

es sei also

$$f(c) = c, \qquad f(x) \neq x \quad \text{für} \quad x \neq c, \qquad a \leqq x \leqq b.$$

Unter diesen Voraussetzungen habe ich in einer früheren Arbeit[1]) eine einfache hinreichende *Bedingung für die Existenz der Grenzfunktion* $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ mitgeteilt[2]).

Diesmal möchte ich die notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung aufstellen und ein Maß für die Konvergenz angeben. Auch diese erschöpfende Konvergenzbedingung ist sehr einfacher Art.

---

[1]) Über wiederholte Funktionen, Math. Ann. 78 (1917), S. 52–62. Kenntnis dieser Abhandlung wird hier nicht vorausgesetzt.

[2]) A. a. O., S. 53 unter „Satz II".

Zunächst seien noch einige Bezeichnungen vorausgeschickt.

ε sei eine beliebige positive Zahl; dann gibt es wegen (V_1) und (V_3) eine positive Zahl δ derart, daß

$$(1) \qquad |f(x)-c| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 \leqq |x-c| \leqq \delta \leqq \varepsilon, \qquad a \leqq x \leqq b.$$

Wir wollen annehmen, daß δ nicht größer sei als die größere der beiden Zahlen $c-a$ und $b-c$ bzw. deren gemeinsamer Wert. Alsdann bezeichnen wir das Minimum von $|f(x)-x|$ für $|x-c| \geqq \delta$, $a \leqq x \leqq b$ mit η_1, das Minimum von $|f_2(x)-x|$ für $|x-c| \geqq \delta$, $a \leqq x \leqq b$ mit η_2 und die kleinere der beiden Zahlen η_1 und η_2 bzw. deren gemeinsamen Wert mit η; so wird:

$$(2) \qquad |f(x)-x| \geqq \eta \quad \text{für} \quad |x-c| \geqq \delta, \qquad a \leqq x \leqq b$$

und

$$(3) \qquad |f_2(x)-x| \geqq \eta \quad \text{für} \quad |x-c| \geqq \delta, \qquad a \leqq x \leqq b.$$

Nun lautet unser Konvergenztheorem wie folgt:

Lehrsatz. *Ist $f(x)$ für $a \leqq x \leqq b$*

(V_1) *stetig,*

(V_2) *wiederholbar und*

(V_3) *nur mit der einen Fixstelle $x = c$ behaftet,*

so ist dafür, daß die Grenzfunktion $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ existiere, die folgende Bedingung hinreichend und notwendig:

(V_4) *Auch $f_2(x)$ habe für $a \leqq x \leqq b$ nur die eine Fixstelle $x = c$.*

Unter den Voraussetzungen (V_1) bis (V_4) konvergiert die Folge

$$(\mathfrak{F}) \qquad f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots$$

für $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig gegen den Wert c, und es ist

$$(4) \qquad |f_n(x)-c| \leqq \varepsilon \quad \textit{für} \quad a \leqq x \leqq b, \qquad n \geqq \frac{b-a-\delta}{\eta}+1.$$

Beweis. I. (V_4) *ist hinreichende Bedingung.*

Die Voraussetzungen (V_1) bis (V_4) seien erfüllt.

Ist $a < c$, so ist nach (V_2) und (V_3): $f(a) > a$; hieraus folgt wegen (V_1) und (V_3):

$$(5) \qquad f(x) > x \quad \text{für} \quad a \leqq x < c;$$

analog wird

$$(6) \qquad f(x) < x \quad \text{für} \quad c < x \leqq b.$$

Aus (V_1), (V_2) und (V_4) folgen entsprechende Ungleichungen für die Funktion $f_2(x)$, nämlich:

$$(7) \qquad f_2(x) > x \quad \text{für} \quad a \leqq x < c,$$

$$(8) \qquad f_2(x) < x \quad \text{für} \quad c < x \leqq b.$$

(V_1) und (V_3) geben $\eta_1 > 0$, (V_1) und (V_4) geben $\eta_2 > 0$, also ist

(9) $$\eta > 0.$$

Wir greifen nun einen beliebigen Argumentwert x heraus (wo $a \leqq x \leqq b$) und zerlegen die Zahlfolge

($\mathfrak{F}$) $$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots$$

in die drei Folgen:

($\mathfrak{U}$) $$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots,$$

($\mathfrak{V}$) $$v_0,\ v_1,\ v_2, \ldots,$$

($\mathfrak{W}$) $$w_0,\ w_1,\ w_2, \ldots.$$

($\mathfrak{U}$) enthalte alle Glieder von ($\mathfrak{F}$), die $< c$ sind, ($\mathfrak{V}$) alle Glieder, die $> c$ sind, und ($\mathfrak{W}$) alle Glieder, die $= c$ sind, und zwar jeweils in derselben Reihenfolge wie in ($\mathfrak{F}$).

Ist $x = c$, so sind die Folgen ($\mathfrak{U}$) und ($\mathfrak{V}$) beide leer, alle Glieder von ($\mathfrak{F}$) haben den Wert c und Ungleichung (4) ist gesichert.

Wir nehmen jetzt an, es sei $x \neq c$, so sind ($\mathfrak{U}$) und ($\mathfrak{V}$) nicht beide leer. Wir wollen überdies annehmen, ($\mathfrak{U}$) besitze zum mindesten die beiden Glieder u_0 und u_1. Dann ist $f(u_0) \neq c$.

Es sei zunächst $f(u_0) < c$, so wird $u_1 = f(u_0)$, also gemäß (5): $u_1 > u_0$. Ist überdies $u_0 \leqq c - \delta$, so ist nach (2): $u_1 - u_0 \geqq \eta$. Ist $u_1 \leqq c - \delta$, so gilt die Ungleichung $u_1 - u_0 \geqq \eta$ um so mehr.

Nun sei andererseits $f(u_0) > c$. In diesem Falle gehört $f(u_0)$ zu ($\mathfrak{V}$). Es sei etwa $f(u_0) = v_i$, so muß es, da wir Existenz von u_1 voraussetzen, einen Index $j \geqq i$ geben, für welchen

(10) $$f(v_j) = u_1$$

ist. Ist $j > i$, so wird nach (6)

$$v_\nu - v_{\nu-1} = f(v_{\nu-1}) - v_{\nu-1} < 0 \quad \text{für} \quad i+1 \leqq \nu \leqq j,$$

also

$$v_j - v_i = \sum_{\nu=i+1}^{j} (v_\nu - v_{\nu-1}) < 0;$$

nimmt man den Fall $j = i$ hinzu, so erhält man:

(11) $$c < v_j \leqq v_i.$$

Nun ist $f(u_0) = v_i$, $f(c) = c$, also gibt es wegen (V_1) und (11) eine Zahl ξ, für welche

(12) $$u_0 \leqq \xi < c, \qquad f(\xi) = v_j$$

ist. (7), (10) und (12) ergeben:

(13) $$u_1 = f_2(\xi) > \xi \geqq u_0$$

oder $u_1 > u_0$, wie in dem zuerst betrachteten Falle $f(u_0) < c$. Ist überdies $u_1 \leqq c - \delta$, so ist nach (13): $\xi < c - \delta$, also wegen (3): $f_2(\xi) \geqq \xi + \eta$, und es wird wieder wie im Falle $f(u_0) < c$: $u_1 - u_0 \geqq \eta$.

Dieselbe Betrachtung wie für u_0 und u_1 kann man für zwei beliebige aufeinanderfolgende Glieder der Folge ($\mathfrak{U}$) anstellen, und findet so:

$$(14) \qquad u_\nu - u_{\nu-1} > 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

und

$$(15) \qquad u_\nu - u_{\nu-1} \geqq \eta \quad \text{für} \quad u_\nu \leqq c - \delta, \quad \nu \geqq 1.$$

Aus (14) folgt:

$$(16) \qquad u_l - u_k = \sum_{\nu=k+1}^{l} (u_\nu - u_{\nu-1}) > 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq k < l;$$

aus (15) folgt:

$$(17) \qquad u_l - u_0 \geqq l\eta \quad \text{für} \quad u_l \leqq c - \delta, \quad l \geqq 0.$$

Die Ungleichung (17), die unter der Voraussetzung bewiesen wurde, daß u_1 existiere, gilt für $l = 0$ auch ohne diese Voraussetzung.

Ganz analog erhält man:

$$(18) \qquad v_{\nu-1} - v_\nu > 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$(19) \qquad v_{\nu-1} - v_\nu \geqq \eta \quad \text{für} \quad v_\nu \geqq c + \delta, \quad \nu \geqq 1;$$

$$(20) \qquad v_0 - v_m \geqq m\eta \quad \text{für} \quad v_m \geqq c + \delta, \quad m \geqq 0.$$

Wir nehmen nun an, es sei für einen gewissen Indexwert n:

$$(21) \qquad f_n(x) < c - \varepsilon.$$

In der Teilfolge von ($\mathfrak{F}$):

$$(\mathfrak{F}_n) \qquad f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$$

mögen sich $q + 1$ Glieder der Folge ($\mathfrak{U}$) und $r + 1$ Glieder der Folge ($\mathfrak{B}$) befinden; Glieder von ($\mathfrak{W}$) können wegen (21) in ($\mathfrak{F}_n$) nicht vorkommen. Alsdann wird:

$$q + 1 \geqq 0, \qquad r + 1 \geqq 0,$$

und

$$(q + 1) + (r + 1) = n + 1,$$

oder

$$(22) \qquad q + r + 1 = n;$$

ferner wird wegen (21):

$$(23) \qquad u_q = f_n(x).$$

Nun sei zunächst $r + 1 > 0$. In diesem Fall enthält ($\mathfrak{F}_n$) mindestens *ein* Glied von ($\mathfrak{B}$), und v_r ist das letzte Glied von ($\mathfrak{B}$), das in ($\mathfrak{F}_n$) vor-

kommt. $f(v_r)$ ist demnach eine der Zahlen $u_0, u_1, \ldots, u_q$; es sei etwa

(24) $$f(v_r) = u_p,$$

wo $0 \leqq p \leqq q$, so ist nach (1), (16), (21) und (23):

(25) $$u_p \leqq u_q < c - \varepsilon \leqq c - \delta,$$

also wegen (24): $|f(v_r) - c| > \varepsilon$; aus (1) folgt hiermit:

(26) $$v_r > c + \delta.$$

Nach (17), (20), (25) und (26) wird:

$$u_q - u_0 \geqq q\,\eta,$$
$$v_0 - v_r \geqq r\,\eta.$$

Andererseits ist aber wegen (25) und (26):

$$u_q - u_0 < c - \delta - a,$$
$$v_0 - v_r < b - c - \delta;$$

somit wird, wenn man die Ungleichung (9) berücksichtigt:

$$q < \frac{c - \delta - a}{\eta}, \qquad r < \frac{b - c - \delta}{\eta},$$

also wegen (22):

$$n < \frac{b - a - 2\delta}{\eta} + 1 < \frac{b - a - \delta}{\eta} + 1.$$

Jetzt sei $r + 1 = 0$. In diesem Falle kommt in $(\mathfrak{F}_n)$ kein Glied von $(\mathfrak{B})$ vor und man erhält:

$$q = n,$$
$$n\eta \leqq u_n - u_0 < c - \delta - a,$$
$$n < \frac{c - \delta - a}{\eta},$$

also um so mehr

$$n < \frac{b - a - \delta}{\eta} + 1$$

wie für $r + 1 > 0$.

Dieselbe Ungleichung erhält man durch ähnliche Betrachtungen auch für $f_n(x) > c + \varepsilon$. Es ist somit:

(4) $$|f_n(x) - c| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b, \quad n \geqq \frac{b - a - \delta}{\eta} + 1,$$

was zu beweisen war.

II. (V_4) *ist notwendige Bedingung.*

Die Voraussetzungen (V_1), (V_2), (V_3) seien erfüllt. Nimmt man an, $f_2(x)$ habe außer $x = c$ noch die Fixstelle $x = \alpha$, wo $a \leqq \alpha \leqq b$, so wird $f_2(\alpha) = \alpha$, und nach (V_3): $f(\alpha) \neq \alpha$, und es wird:

$$f_{2n}(\alpha) = \alpha, \quad f_{2n+1}(\alpha) = f(\alpha) \neq \alpha \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

demnach divergiert die Folge

$$f_0(\alpha),\ f_1(\alpha),\ f_2(\alpha), \ldots.$$

Hiermit ist bewiesen, daß (V_4) für Konvergenz der Folge $(\mathfrak{F})$ im abgeschlossenen Intervall $a \leqq x \leqq b$ notwendig ist. —

Jetzt werde unsere Konvergenzbedingung der Anschaulichkeit halber noch auf eine mehr geometrische Form gebracht:

Unter Beibehaltung der Voraussetzungen (V_1), (V_2) *und* (V_3) *ist die folgende Bedingung mit* (V_4) *gleichbedeutend:*

(V_5) *Die Kurve* $y = f(x)$ *und ihre Spiegelkurve*[3]) $x = f(y)$ *haben in dem Quadrat* $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$ *nur den Punkt* $x = y = c$ *gemein.*

Beweis. Ist $f_2(\alpha) = \alpha$, wo $a \leqq \alpha \leqq b$, so ist der Punkt $x = \alpha$, $y = f(\alpha)$ ein gemeinsamer Punkt der Kurven $y = f(x)$ und $x = f(y)$, wie man durch Einsetzen erkennt. Also ist (V_4) erfüllt, sobald (V_5) erfüllt ist.

Ist andererseits $x = \beta$, $y = \gamma$ $(a \leqq \beta \leqq b)$ ein gemeinsamer Punkt der beiden Kurven, so wird $\gamma = f(\beta)$ und $\beta = f(\gamma)$, woraus folgt: $\beta = f_2(\beta)$, d. h. (V_5) ist erfüllt, sobald (V_4) erfüllt ist. Damit ist die Äquivalenz von (V_4) und (V_5) bewiesen[4]).

Zum Schlusse sei noch auf die Anwendung des Lehrsatzes auf die numerische Lösung der Gleichung $f(x) = x$ hingewiesen. Erfüllt $f(x)$ die Voraussetzungen des Lehrsatzes und ist $a \leqq x_1 \leqq b$, so konvergiert die Folge

$$x_1,\ f(x_1),\ f_2(x_1),\ f_3(x_1), \ldots$$

gegen die Wurzel c der Gleichung $f(x) = x$. Da die Konvergenz, wie bewiesen, gleichmäßig ist, so ist es unwesentlich, welcher Wert des Intervalles $a \leqq x \leqq b$ zum ersten Näherungswert gemacht wird.

---

[3]) $x = f(y)$ ist offenbar das Spiegelbild von $y = f(x)$ bezüglich der ersten Mediane $y = x$.

[4]) Versteht man unter G das Maximum von $f(x)$ für $a \leqq x \leqq c$, so läßt sich ferner beweisen, daß unter den Voraussetzungen des Lehrsatzes *die Kurve* $y = f(x)$ *für* $c < x \leqq G$ *oberhalb der Spiegelkurve* $x = f(y)$ verlaufen muß, wenn man sich die positive y-Halbachse nach oben gerichtet denkt.

(Eingegangen am 26. 1. 1921.)

Ebene Bipotentiale, die nur von einer Veränderlichen abhängen.

Von

Theodor Pöschl in Prag.

1. Kennzeichnung des Problems.

Im folgenden bezeichne ich jede Lösung der biharmonischen Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$, wobei $\Delta U = U_{xx} + U_{yy}$, in der Ebene kurz als *Bipotential* und nenne dieses *eigentlich*, wenn es nicht zugleich auch der Potentialgleichung $\Delta U = 0$ genügt, also nicht zugleich Potential ist. Wenn man diese Bipotentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$ auf ebene Polarkoordinaten transformiert, so sind, wie seit langem bekannt ist, r^2 und $r^2 \log r$ bzw. $\cos 2\varphi$ und $\sin 2\varphi$ zwei solche Lösungen dieser Gleichung, und zwar *eigentliche* Bipotentiale, die nur von je einer dieser Veränderlichen abhängen. Ebenso habe ich kürzlich[1]) gelegentlich des Problems der Spannungsverteilung in einer dünnen Scheibe, die ein elliptisches Loch besitzt und von Kräften in ihrer Ebene gezogen wird, bemerkt, daß auch im Falle der elliptischen Koordinaten ξ und η solche nur von je einer dieser Veränderlichen abhängige Bipotentiale existieren, und zwar sind diese $\mathfrak{Sin}\, 2\xi$ und $\sin 2\eta$. Die den Cartesischen Koordinaten entsprechenden eigentlichen Bipotentiale lauten bekanntlich x^2, x^3 bzw. y^2, y^3.

Es erhebt sich nun naturgemäß die auch für die Anwendungen nicht unwichtige Frage, alle Potentialfunktionen $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ von x und y anzugeben, für welche solche eigentliche, nur von einer Veränderlichen abhängige Bipotentiale existieren, oder etwas anders ausgedrückt, es sind alle eigentlichen Bipotentiale zu bestimmen, die von einem Potential abhängen.

Eine verwandte Problemstellung für räumliche (dreidimensionale) Potentiale hat T. Levi-Civita[2]) behandelt, indem er die der Gleichung

---

[1]) Math. Zeitschrift **11** (1921).

[2]) Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate, Memorie di Torino (2) **49** (1899).

$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$ genügenden Lösungstypen bestimmte, die nur von zwei Veränderlichen abhängig gemacht werden können.

2. Ansatz und Integration.

Es sei $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ und $z = f(\zeta)$. Führt man in dem Ausdruck $\Delta U = U_{xx} + U_{yy}$ für x und y die neuen Veränderlichen ξ und η auf Grund der eben angeschriebenen Abhängigkeit ein, so folgt

$$(1) \qquad \Delta U = \lambda \cdot \Delta^* U,$$

wobei bekanntlich

$$(2) \qquad \lambda = \lambda(\xi, \eta) = \frac{1}{|f'(\zeta)|^2}$$

ist und $\Delta^* U = U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta}$ gesetzt ist.

Dementsprechend geht die Bipotentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$ über in

$$(3) \qquad \Delta\Delta U = \lambda\left\{\lambda\Delta^*\Delta^* U + 2\left(\lambda_\xi \frac{\partial \Delta^* U}{\partial \xi} + \lambda_\eta \frac{\partial \Delta^* U}{\partial \eta}\right) + \Delta^*\lambda \cdot \Delta^* U\right\} = 0.$$

Sei nun $U = U(\xi)$ eine Lösung dieser Gleichung, die nur von ξ allein abhängt, und setzen wir $U_{\xi\xi} = X(\xi)$, so genügt X der Gleichung

$$(4) \qquad X'' + 2\frac{\lambda_\xi}{\lambda} X' + \frac{\lambda_{\xi\xi} + \lambda_{\eta\eta}}{\lambda} X = 0$$

und diese Gleichung geht unter Berücksichtigung des Umstandes, daß $\log \lambda$ selbst ein Potential, also $\Delta \log \lambda = 0$, oder

$$\frac{\lambda_{\xi\xi} + \lambda_{\eta\eta}}{\lambda} = \left(\frac{\lambda_\xi}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_\eta}{\lambda}\right)^2$$

ist und unter Einführung von $\log \lambda = u$ über in

$$(5) \qquad X'' + 2u_\xi X' + (u_\xi^2 + u_\eta^2) X = 0.$$

Wir können nun voraussetzen, daß X von 0 verschieden ist, denn $X = 0$ würde $U = A\xi + B$, also einem Potential entsprechen. Wenn daher

$$(6) \qquad \frac{X'}{X} = -\varphi$$

gesetzt wird, so folgt zunächst

$$(7) \qquad \frac{X''}{X} = \varphi^2 - \varphi'$$

und Gl. (5) wird

$$(8) \qquad \varphi' = \varphi^2 - 2\varphi u_\xi + u_\xi^2 + u_\eta^2.$$

Aus dieser Gleichung und aus $\Delta u = 0$ ist nun durch Differenzieren eine von u unabhängige Bedingungsgleichung für φ zu gewinnen. Für die Ausführung dieses Vorganges empfiehlt sich die Einführung von Minimal-

koordinaten an Stelle von ξ und η, indem wir wieder zur Variablen ζ zurückkehren; wir setzen hierzu

$$(9)\qquad \begin{cases} u_\xi - i\,u_\eta = w(\zeta), \\ u_\xi + i\,u_\eta = \bar{w}(\bar{\zeta}), \end{cases}$$

damit wird $\varphi(\xi) = \varphi\left(\frac{\zeta+\bar\zeta}{2}\right)$ und

$$(10)\qquad \varphi' = (\varphi - w)(\varphi - \bar{w}) = P\cdot\bar{P},$$

wenn noch zur Abkürzung $\varphi - w = P$, $\varphi - \bar{w} = \bar{P}$ eingeführt wird. Auf diese Gleichung (10) üben wir nun die Operationen $2\frac{\partial}{\partial\zeta}$ und $2\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}$ aus und führen für die Ableitungen der Größen P die weiteren Bezeichnungen ein:

$$(11)\qquad \begin{cases} P_1 = 2\dfrac{\partial P}{\partial\zeta} = \varphi' - 2w', \\[2ex] \bar{P}_1 = 2\dfrac{\partial\bar{P}}{\partial\bar\zeta} = \varphi' - 2\bar{w}', \end{cases}$$

wobei die Striche (′) wie bisher Ableitungen nach den vollen Argumenten der betreffenden Funktionen bedeuten. Dann folgt

$$(12)\qquad \varphi'' = \varphi' P + P_1\bar{P} = \varphi'\bar{P} + \bar{P}_1 P$$

und durch nochmalige Anwendung von $2\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}$ oder $2\frac{\partial}{\partial\zeta}$:

$$(13)\qquad \varphi''' = \varphi'^2 + \varphi'' P + \varphi''\bar{P} + P_1\bar{P}_1$$

oder

$$\varphi''' - \varphi'^2 = \varphi''(P + \bar{P}) + P_1\bar{P}_1$$

und daraus durch Multiplikation mit $\varphi' = P\bar{P}$:

$$(14)\qquad \varphi'\varphi''' - \varphi'^3 = \varphi'\varphi''(P + \bar{P}) + P\bar{P}P_1\bar{P}_1.$$

Subtrahiert man hiervon die durch Multiplikation der beiden Gleichungen (12) hervorgehende Gleichung

$$(15)\qquad \varphi''^2 - \varphi'\varphi''(P + \bar{P}) + \varphi'^3 = P\bar{P}P_1\bar{P}_1,$$

so erhält man für φ die gesuchte Gleichung

$$\varphi'\varphi''' - 2\varphi'^3 - \varphi''^2 = 0$$

oder

$$\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 = 2\varphi'.$$

Diese Gleichung gibt integriert

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = 2\varphi - a$$

und nochmals integriert

$$\varphi' = \varphi^2 - a\varphi + b, \tag{16}$$

worin a und b willkürliche reelle Konstante bedeuten.

Geht man von φ mittels der ersten Gleichung (6) wieder zu X über, so folgt für X die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$X'' + aX' + bX = 0. \tag{17}$$

Weiter ergibt sich durch Division der ersten Gleichung (12) und (10)

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} - P = \frac{P_1}{P}$$

und durch Einsetzen von P und P_1:

$$\begin{aligned}(2\varphi - a)(\varphi - w) - (\varphi - w)^2 &= \varphi' - 2w' \\ &= \varphi^2 - a\varphi + b - 2w'\end{aligned}$$

oder

$$2w' = w^2 - aw + b. \tag{18}$$

Führt man eine neue Funktion $\omega(\zeta)$ ein durch die Substitution

$$w = -2\frac{d\log\omega}{d\zeta}, \tag{19}$$

so folgt für ω die gleichfalls lineare Gleichung

$$\omega'' + \frac{a}{2}\omega' + \frac{b}{4}\omega = 0. \tag{20}$$

Aus den Gleichungen (9) und (19) folgt nun, daß

$$u = \Re\int w\,d\zeta = \Re\log\frac{1}{\omega^2} = \log\frac{1}{|\omega^2|},$$

andererseits ist nach Gleichung (2)

$$u = \log\lambda = \log\frac{1}{|f'(\zeta)|^2},$$

somit können wir setzen

$$f'(\zeta) = \omega,$$

also

$$x + iy = f(\zeta) = \int\omega\,d\zeta + C, \tag{21}$$

womit das vorgelegte Problem im wesentlichen gelöst ist. Es erübrigt nur die möglichen besonderen Formen dieser Funktion $f(\zeta)$ anzugeben.

3. Die Lösungen.

Werden die Wurzeln der zu Gleichung (20) gehörigen charakteristischen Gleichung mit p und q bezeichnet, so sind die Wurzeln der zu Gleichung (17) gehörigen $2p$ und $2q$ und je nach der Beschaffenheit dieser Wurzeln, die von den willkürlichen Konstanten a und b abhängen, haben wir folgende drei Fälle zu unterscheiden:

I. p und q sind reell und voneinander verschieden, also $\frac{a^2}{4} - b > 0$, dann ist das vollständige Integral von (20)

$$\omega = f'(\zeta) = A e^{p\zeta} + B e^{q\zeta} \tag{22}$$

und wir erhalten aus (21)

$$x + iy = f(\zeta) = \frac{A}{p} e^{p\zeta} + \frac{B}{q} e^{q\zeta}, \tag{23}$$

wenn A und B zwei neue komplexe Integrationskonstanten sind und die unwesentliche additive Konstante fortgelassen wird. Die zugehörigen eigentlichen Bipotentiale sind als Lösungen der Gleichung (17) gegeben durch

$$U_{\xi\xi} = X = A_1 e^{2p\xi} + B_1 e^{2q\xi}, \tag{24}$$

wobei die Konstanten A_1 und B_1 reell anzunehmen sind. Diese Konstanten A, B und A_1, B_1 sind nicht sämtlich willkürlich, es besteht vielmehr zwischen ihnen, wie man durch Rückeinsetzen in die Gleichung (10) erhält, die Beziehung

$$A_1 B\bar{B} + B_1 A\bar{A} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{A_1}{B_1} = -\frac{A\bar{A}}{B\bar{B}}. \tag{25}$$

Tatsächlich sind für die Lösung nur die Verhältnisse und nicht die Konstanten selbst von Bedeutung.

II. $p = q = -\frac{a}{4}$, reell, also $\frac{a^2}{4} - b = 0$. Hierfür ist das vollständige Integral von Gleichung (20):

$$\omega = f'(\zeta) = (A + B\zeta) e^{p\zeta} \tag{26}$$

und daraus

$$f(\zeta) = \frac{1}{p}\left[A + B\left(\zeta - \frac{1}{p}\right)\right] e^{p\zeta}; \tag{27}$$

die zugehörigen Bipotentiale sind gegeben durch

$$X = U_{\xi\xi} = (A_1 + B_1 \xi) e^{2p\xi}, \tag{28}$$

wobei A_1 und B_1 reell sind und zwischen den Konstanten jetzt die Beziehung bestehen muß

$$2A_1 B\bar{B} - B_1 (A\bar{B} + B\bar{A}) = 0. \tag{29}$$

III. $\frac{a^2}{4} - b < 0$, also p und q konjugiert komplex, also $q = \bar{p}$. In diesem Falle ist ω wieder von der Form (22) und auch die Gleichungen (23) und (24) bleiben der Form nach in Geltung. Damit jedoch die Bipotentiale reell ausfallen, müssen auch A_1 und B_1 in (24) zueinander konjugiert sein, also $B_1 = \bar{A}_1$.

Wir erhalten also

$$\omega = A e^{p\zeta} + B e^{\bar{p}\bar{\zeta}} \tag{30}$$

und

$$X = A_1 e^{2p\zeta} + \bar{A}_1 e^{2\bar{p}\bar{\zeta}}. \tag{31}$$

Durch Rückeinsetzen in die Gleichung (10) ergibt sich jetzt die folgende Beziehung zwischen den Konstanten

$$A_1 B \bar{A} + \bar{A}_1 A \bar{B} = 0. \tag{32}$$

Setzt man darin

$$A_1 = A_1^* + i B_1^*,$$

und

$$A = \alpha + i\beta, \qquad B = \gamma + i\delta,$$

so schreibt sich die vorstehende Gleichung auch so

$$\frac{A_1^*}{B_1^*} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha\gamma + \beta\delta}. \tag{32'}$$

4. Sonderfälle.

a) $p = 0$, $q = 0$, dann ist $a = 0$, $b = 0$, und man erhält $X'' = 0$, also $X = U_{\xi\xi} = 6A\xi + 2B$ und $U = A\xi^3 + B\xi^2$, d. i. der Fall der Cartesischen Koordinaten.

b) $p = q \neq 0$, $X = A_1 e^{2p\xi} + B_1 \xi e^{2p\xi}$ (Fall II). Wird darin $\xi = \log r$ gesetzt, so folgen r^2 und $r^2 \log r$ als die eigentlichen Bipotentiale, die den Polarkoordinaten in der Ebene entsprechen.

c) $p + q = 0$, $A + B = 0$ (s. Fall I), dann kommt $A_1 + B_1 = 0$ und

$$f(\zeta) = \frac{2A}{p} \operatorname{Cof} p\zeta, \qquad X = 2A_1 \operatorname{Sin} 2p\xi, \qquad U = \frac{A_1}{2p^2} \operatorname{Sin} 2p\xi$$

und dies ist der eingangs erwähnte Fall der elliptischen Koordinaten.

In diesen drei Sonderfällen existieren gleichzeitig mit diesen von ξ allein abhängigen, wie leicht zu erkennen, auch von der zweiten Veränderlichen η allein abhängige Bipotentiale, was im allgemeinen nicht der Fall zu sein braucht.

(Eingegangen am 21. 3. 1921.)

Zusatz bei der Korrektur. In seiner Arbeit über „Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten", Jahresb. d. D. Math.-Ver. **25** (1916), löste Herr G. Hamel das analoge Problem für die Differentialgleichung, der die Stromfunktion für stationäre ebene Strömungen genügt, und die sich nur durch die Trägheitsglieder von $\Delta\Delta u = 0$ unterscheidet; das dabei gewonnene Ergebnis ist als Sonderfall im obigen enthalten. Ich sage Herrn Hamel für diesen Hinweis besten Dank.

Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz.

Von

Georg Pólya in Zürich.

---

1. Ich beziehe den d-dimensionalen Raum auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Ich betrachte diejenigen Punkte, deren Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_d$ sämtlich ganzzahlig sind, und solche Verbindungsgeraden dieser Punkte, die einer der d Koordinatenaxen parallel sind. Die Gesamtheit dieser Geraden bildet das d-dimensionale *Geradennetz*, und die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, die man gewöhnlich als Gitterpunkte bezeichnet, sollen die *Knotenpunkte* des Netzes heißen. In jedem Knotenpunkte kreuzen sich d zueinander rechtwinklige Geraden des Netzes, und jede Gerade wird durch die daraufliegenden Knotenpunkte in gleiche Stücke von der Länge 1 geteilt. Auf dem Geradennetz soll ein Punkt aufs Geratewohl herumfahren. D. h. an jeden neuen Knotenpunkt des Netzes angelangt, soll er sich mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2d}$ für eine der möglichen $2d$ Richtungen entscheiden. Der Bestimmtheit halber wollen wir uns vorstellen, daß der herumwandernde Punkt zur Zeit $t = 0$ im Anfangspunkt des Koordinatensystems seine Irrfahrt beginnt, und daß er sich mit der Geschwindigkeit 1 bewegt. In der Zeit t beschreibt er einen Zickzackweg von der Länge t, in jedem ganzzahligen Zeitpunkt $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ passiert er einen Knotenpunkt und fällt eine vom Zufall geleitete Entscheidung unter $2d$ gleichmöglichen Richtungen.

Für $d = 1$ haben wir eine, in gleiche Segmente geteilte, unbegrenzte Gerade und die geometrische Darstellung des „Wappen-oder-Schrift"-Spiels vor uns. Die Wappenseite einer Münze soll einem Spieler eine Geldeinheit Gewinn einbringen, die Schriftseite einen ebenso großen Verlust; der jeweilige Stand von Gewinn und Verlust soll als positiver bzw. negativer Abstand an einer Geraden von einem festen Ausgangspunkte aus durch eine bewegliche Marke registriert werden. Nach jedem Wurf verschiebt

sich die Marke um eine Einheit nach rechts oder nach links; die Hin- und Herpendelung der Marke bei fortgesetztem Spiel ist gerade der eindimensionale Fall der beschriebenen Irrfahrt. Für $d = 2$ haben wir die Irrfahrt eines Spaziergängers in einem regulären quadratischen Straßennetz, für $d = 3$ das angenäherte Bild der Irrfahrt eines Moleküls, das in einem Kristall des regulären Systems diffundiert.

Von den klassischen Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung über Wappen und Schrift, die mit Hilfe des beschriebenen Bildes mehrdimensional verallgemeinert werden können, betrachte ich hauptsächlich diejenige über den „Ruin des Spielers"[1]). Besitzt der Spieler Q Geldeinheiten, so handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit, daß er in höchstens n Spielen seinen ganzen Besitz verspielt, oder auf die eindimensionale Irrfahrt bezogen, um die Wahrscheinlichkeit, daß der vom Ausgangspunkt zur Zeit $t = 0$ aufbrechende, auf der Geraden aufs Geratewohl hin- und hergehende Punkt bis zur Zeit $t = n$ mindestens einmal die Stelle mit der Abszisse $-Q$ erreicht. Ich betrachte jetzt die Irrfahrt im d-dimensionalen Geradennetz; es sei gegeben ein Knotenpunkt mit den Koordinaten $a_1, a_2, \ldots, a_d$; es handelt sich jetzt um die Wahrscheinlichkeit, daß der herumirrende Punkt in der Zeitspanne $0 < t \leqq n$ mindestens einmal den gegebenen Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ passiert. Die Wahrscheinlichkeit wächst offenbar mit zunehmendem n. Es erhebt sich die Frage: strebt sie gegen die Sicherheit, wenn n unbegrenzt wächst?

Ja, wenn $d = 1$ oder $d = 2$, ***nein***, wenn $d \geqq 3$. Diese Antwort will ich im folgenden begründen. Die Frage ist übrigens nur wenig verschieden von der folgenden: Es brechen zur Zeit $t = 0$ ***zwei*** Punkte auf, von zwei gegebenen Knotenpunkten; sie irren auf die beschriebene Weise, mit der gleichen Geschwindigkeit 1, aber voneinander unabhängig im d-dimensionalen Geradennetz herum. Es handelt sich um die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden sich innerhalb der Zeitspanne $0 < t \leqq n$ begegnen; wird diese Wahrscheinlichkeit mit wachsendem n gegen 1 streben? ***Ja*** für $d = 1, 2$, ***nein*** für $d = 3, 4, 5, \ldots$. Für $d = 1$ war dies Resultat, wie gesagt, implizite bekannt. Daß die Punkte in höheren Dimensionen „mehr Platz" haben, um aneinander vorbeizulaufen, ist plausibel. Aber daß der wesentliche Unterschied sich beim Übergang von der Ebene zu dem dreidimensionalen Raum einstellt, schien mir der Mitteilung wert zu sein.

Sämtliche klassischen Aufgaben über wiederholtes Werfen mit einer Münze lassen sich als Aufgaben über den eindimensionalen Fall der beschriebenen Irrfahrt interpretieren und viele darunter gewinnen sehr an

---

[1]) Vgl. z. B. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig und Berlin 1912), S. 116—129.

Anschaulichkeit und Verallgemeinerungsfähigkeit bei dieser Interpretation. Ich begnüge mich heute mit der Bearbeitung der erläuterten Fragestellung. Natürlich können sämtliche Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung kinematisch interpretiert und als Aufgaben über irgendeine Art von Irrfahrt gelesen werden. Bei den meisten Problemen, klassischen und modernen, wird die Erfassung der Zusammenhänge, die pädagogische Eindringlichkeit des Vortrages, der Übergang zu den Anwendungen sehr durch die kinematische Auffassung gefördert, soweit ich nach meinen Erfahrungen urteilen kann[2]).

2. Ich betrachte einen Punkt, der zur Zeit $t=0$ vom Koordinatenanfangspunkt aufbrechend auf die eingangs beschriebene Weise im d-dimensionalen Netz herumirrt. Im Zeitpunkt $t=m$ befindet er sich in einem Knotenpunkt $(m=0,1,2,\ldots)$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Knotenpunkt die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_d$ haben soll, sei mit $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ bezeichnet. Es ist $P_0(0,0,\ldots,0)=1$ und $P_0(x_1, x_2, \ldots, x_d)=0$ für jeden von dem Anfangspunkt verschiedenen Knotenpunkt $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Bei jedem festen m ist $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ nur für eine endliche Anzahl Knotenpunkte $x_1, x_2, \ldots, x_d$ von Null verschieden. Ich bemerke, daß notwendigerweise

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_d \equiv m \pmod 2, \quad \text{wenn} \quad P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d) > 0.$$

Die Summe der d Koordinaten des Knotenpunktes, den der wandernde Punkt passiert, ändert sich nämlich von jedem ganzzahligen Zeitpunkt zum nächstfolgenden um $+1$ oder um -1, also, mod. 2 gerechnet, um $+1$, ebenso wie m; für $m=0$ ist diese Summe $=0$; daher ist (1) richtig. — $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ ist eine gerade, symmetrische Funktion der d ganzzahligen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_d$.

Unter mehreren sich darbietenden Methoden[3]) zur Untersuchung von

---

[2]) G. Pólya, 1. Anschauliche und elementare Darstellung der Lexisschen Dispersionstheorie, Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft **55** (1919), S. 121—140; 2. Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die „Irrfahrt“, Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft Zürich **19** (1919), S. 75—86; 3. Anschaulich-experimentelle Herleitung der Gaußschen Fehlerkurve, Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterr. **52** (1921), S. 57—65.

[3]) $(2d)^m P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ ist die Anzahl sämtlicher Zickzackwege im Netz, die aus m Stücken von der Länge 1 zusammengesetzt vom Punkt $0,0,\ldots,0$ zum Punkt $x_1, x_2, \ldots, x_d$ führen. Daher ist

$$(2d)^m P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \sum (2d)^{m-1} P_{m-1}(y_1, y_2, \ldots, y_d)$$

die Summe über die $2d$ zu $x_1, x_2, \ldots, x_d$ nächstliegenden Knotenpunkte $y_1, y_2, \ldots, y_d$ erstreckt. Aus dieser Rekursionsformel läßt sich über die relative Größe der Wahr-

$P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ wähle ich die klassische, die diese Wahrscheinlichkeiten als Koeffizienten einer erzeugenden Funktion darstellt. $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ ist eindeutig bestimmt durch die in den d Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots, u_d$ identische Gleichung

$$(2) \qquad \left(\frac{e^{u_1}+e^{-u_1}+e^{u_2}+e^{-u_2}+\ldots+e^{u_d}+e^{-u_d}}{2d}\right)^m$$

$$=\sum_{x_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{x_2=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{x_d=-\infty}^{+\infty} P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)\, e^{x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_du_d}.$$

Man kann, nach der Polynomialformel, die Größen $(2d)^m P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ als Summen über Polynomialkoeffizienten aus (2) ausdrücken. Im einfachsten Fall $d=1$ kommt nur die Binomialformel zur Anwendung; das geläufige Resultat sieht in der jetzigen Bezeichnung so aus:

$$(3) \qquad 2^m P_m(x) = \frac{m!}{\frac{m+x}{2}!\,\frac{m-x}{2}!}.$$

Ich bemerke noch die einfache Formel

$$(4) \qquad 4^{2n} P_{2n}(0,0) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2n!}{\nu!\,\nu!\,n-\nu!\,n-\nu!} = \binom{2n}{n}^2.$$

Man setze in (2) $u_1 = i\varphi_1$, $u_2 = i\varphi_2, \ldots, u_d = i\varphi_d$ und drücke die Koeffizienten $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ auf die übliche Weise durch ein d-faches Integral aus. Ich schreibe die Formeln für gerades und ungerades m getrennt hin:

$$\text{für } x_1+x_2+\ldots+x_d \equiv 0 \pmod 2$$

$$(5) \qquad P_{2n}(x_1, x_2, \ldots, x_d) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\iint\cdots\int\left(\frac{\cos\varphi_1+\cos\varphi_2+\ldots+\cos\varphi_d}{d}\right)^{2n} e^{-ix_1\varphi_1-ix_2\varphi_2-\ldots-ix_d\varphi_d}\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_d;$$

---

scheinlichkeiten $P_m(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ viel mehr ableiten, als in den nachfolgenden Formeln (8) bis (11′) enthalten ist. Aus der Rekursionsformel sind die folgenden numerischen Werte von $4^m P_m(x_1, x_2)$ auf ersichtliche Weise abgeleitet:

$$1, \qquad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{array}, \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 1 & & 4 & & 1 \\ & 2 & & 2 & \\ & & 1 & & \end{array}, \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 3 & & \\ & 3 & & 9 & & 3 & \\ 1 & & 9 & & 9 & & 1 \\ & 3 & & 9 & & 3 & \\ & & 3 & & 3 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}.$$

für $x_1 + x_2 + \ldots + x_d \equiv 1 \pmod 2$

$$(6) \qquad P_{2n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_d) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\int\cdots\int\left(\frac{\cos\varphi_1+\cos\varphi_2+\ldots+\cos\varphi_d}{d}\right)^{2n-1} e^{-ix_1\varphi_1-ix_2\varphi_2-\ldots-ix_d\varphi_d}d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi$$

Die Integrale sind erstreckt über den d-dimensionalen Würfel

$$(7) \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi_1 \leqq \frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi_2 \leqq \frac{3\pi}{2}, \quad \ldots, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi_d \leqq \frac{3\pi}{2}.$$

Man könnte auch irgendeinen andern gleich großen und gleich orientierten Würfel als Integrationsgebiet wählen.

Zerlegt man den Integranden passend in 2 Faktoren, von denen der eine positiv ist, und der andere den absoluten Betrag 1 bzw. $\leqq 1$ hat, so ergeben (5) und (6) bzw.

$$(8) \qquad P_{2n}(x_1, x_2, \ldots, x_d) \leqq P_{2n}(0, 0, \ldots, 0),$$

$$(9) \qquad P_{2n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_d) < P_{2n-2}(0, 0, \ldots, 0).$$

Die $2d$ Größen $P_{2n-1}(1, 0, \ldots, 0)$, $P_{2n-1}(-1, 0, \ldots, 0)$, $P_{2n-1}(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $P_{2n-1}(0, \ldots, 0, -1)$ haben denselben Wert, erscheinen jedoch durch (6) etwas verschieden ausgedrückt. Durch Addieren der $2d$ Ausdrücke und Division durch $2d$ erhält man gemäß (5)

$$(10) \qquad P_{2n-1}(1, 0, 0, \ldots, 0) = P_{2n}(0, 0, 0, \ldots, 0).$$

(10) mit (9), bzw. mit (8) und (9) kombiniert ergibt

$$(11) \qquad P_{2n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_d) < P_{2n}(0, 0, \ldots, 0) = P_{2n-1}(1, 0, 0, \ldots, 0),$$

$$(11') \qquad P_{2n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_d) < P_{2n}(0, 0, \ldots, 0).$$

3. Es ist bei festen $x_1, x_2, \ldots, x_d$

$$(12)\begin{cases} \lim\limits_{n=\infty} n^{\frac{d}{2}} P_{2n}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 2\left(\dfrac{d}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}}, \text{ wenn } x_1 + x_2 + \ldots + x_d \equiv 0 \pmod 2 \\ \lim\limits_{n=\infty} n^{\frac{d}{2}} P_{2n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 2\left(\dfrac{d}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}}, \text{ wenn } x_1 + x_2 + \ldots + x_d \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

Ich will nur die Hauptzüge des Beweises andeuten. In dem durch (7) abgegrenzten Integrationsgebiete der Integrale (5), (6) gibt es nur zwei Punkte, nämlich

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \ldots,\ \varphi_d = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \pi,\ \varphi_2 = \pi,\ \ldots,\ \varphi_d = \pi,$$

wo der absolute Wert des Integranden $= 1$ ist.

Man betrachte zwei d-dimensionale Würfel von der Kantenlänge $2a$, der eine soll den Mittelpunkt $0, 0, \ldots, 0$, der andere den Mittelpunkt

$\pi, \pi, \ldots, \pi$ haben; sie seien mit $\mathfrak{W}_0$ und $\mathfrak{W}_\pi$ bezeichnet. Aus dem Integrationsgebiet (7) bleibt nach Wegnahme des Innern der beiden Würfel $\mathfrak{W}_0$ und $\mathfrak{W}_\pi$ ein abgeschlossenes Gebiet übrig. In diesem Gebiet hat

$$\left|\frac{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \ldots + \cos\varphi_d}{d}\right|$$

ein bestimmtes Maximum ϱ, $\varrho < 1$, und der von diesem Gebiet herrührende Teil der Integrale (5), (6) ist $< \varrho^{2n}$ bzw. $< \varrho^{2n-1}$. Ich betrachte nun den über $\mathfrak{W}_0$ erstreckten Teil des Integrals (5). Es ist

$$n^{\frac{d}{2}} \iint\limits_{-\alpha}^{+\alpha} \ldots \int \left(\frac{\cos\varphi_1 + \ldots + \cos\varphi_d}{d}\right)^{2n} e^{-ix_1\varphi_1 - \ldots - ix_d\varphi_d}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_d$$

$$= \iint\limits_{-\alpha\sqrt{n}}^{+\alpha\sqrt{n}} \ldots \int \left(\frac{\cos\frac{t_1}{\sqrt{n}} + \ldots + \cos\frac{t_d}{\sqrt{n}}}{d}\right)^{2n} e^{-\frac{ix_1t_1 + \ldots + ix_dt_d}{\sqrt{n}}}\, dt_1 \ldots dt_d$$

$$= \iint\limits_{-\alpha\sqrt{n}}^{+\alpha\sqrt{n}} \ldots \int \left(1 - \frac{t_1^2 + \ldots + t_d^2}{2dn} + \ldots\right)^{2n} \left(1 - \frac{ix_1t_1 + \ldots + ix_dt_d}{\sqrt{n}} + \ldots\right) dt_1 \ldots dt_d$$

$$\sim \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int e^{-\frac{t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_d^2}{d}}\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_d = (d\pi)^{\frac{d}{2}}.$$

Daraus folgt (12) durch einfaches Einsetzen, wenn man $\lim\limits_{n=\infty} n^{\frac{d}{2}} \varrho^n = 0$ beachtet. Die in der Rechnung gelassene Lücke läßt sich durch geläufige Überlegungen ausfüllen[4]). Übrigens folgt (12) in den Fällen $d = 1, 2$ gemäß (3), (4) einfach aus der Wallisschen Produktformel.

4. Der in dem Anfangspunkte zur Zeit $t = 0$ aufbrechende Punkt kann den gegebenen Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ nur in einem der Zeitpunkte $t = 2, 4, 6, \ldots$ passieren, falls $a_1 + a_2 + \ldots + a_d$ gerade ist, bzw. nur in den Zeitpunkten $t = 1, 3, 5, \ldots$, wenn $a_1 + a_2 + \ldots + a_d$ ungerade. Ich berücksichtige beide Fälle gleichzeitig bei den folgenden Festsetzungen.

p_n heißt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der herumirrende Punkt während der Zeitspanne $2n - 2 < t \leqq 2n$ den Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ passiert.

w_n heißt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der herumirrende Punkt während der Zeitspanne $2n - 2 < t \leqq 2n$ den Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ passiert, *ohne ihn in der Zeitspanne* $0 < t \leqq 2n - 2$ *passiert zu haben.*

---

[4]) Vgl. z. B. G. Pólya, Berechnung eines bestimmten Integrals, Math. Ann. 74, S. 204–212, insbesondere S. 211–212.

W_n heißt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der herumirrende Punkt den Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ innerhalb der Zeitspanne $0 < t \leqq 2n$ passiert.

Die Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten w_m und w_n sind, $m < n$, schließen einander aus. Die Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten p_m und p_n sind, $m < n$, schließen einander nicht aus.

Ich füge hinzu, daß ich diese Bezeichnungen nur im Falle anwende, wo $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_d| \geqq 1$ ist. Ist der Ausgangspunkt selber der zu passierende Punkt, so gebrauche ich die Buchstaben

$$\pi_n, \quad \omega_n, \quad \Omega_n$$

für dieselben Wahrscheinlichkeiten, die ich für einen vom Ausgangspunkt verschiedenen Punkt mit

$$p_n, \quad w_n, \quad W_n$$

bezeichnet habe.

Es ist mit den unter 1 erklärten Bezeichnungen

$$3_0) \quad \pi_n = \quad P_{2n}(0, 0, \ldots, 0),$$

$$3_2) \quad p_n = \begin{Bmatrix} P_{2n}(a_1, a_2, \ldots, a_d) \\ P_{2n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_d) \end{Bmatrix}, \text{ je nachdem } a_1 + a_2 + \ldots + a_d \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \pmod 2$$

Es ist $p_1 = w_1$ nach Definition. Für genügend große Werte von n ist aber offenbar $p_n > w_n$, nämlich sobald Zickzackwege aus $2n$ (bzw. $2n-1$) Stücken von der Länge 1 im Netz möglich sind, die den Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ sowohl als Endpunkt, wie auch als Zwischenpunkt enthalten. Nach den Sätzen über Addition und Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten oder aus der geometrischen Anschauung ergibt sich

$$\begin{aligned} &\pi_1 = \omega_1, && p_1 = w_1, \\ &\pi_2 = \omega_1^2 + \omega_2, && p_2 = w_1\omega_1 + w_2, \\ &\pi_3 = \omega_1^3 + 2\omega_1\omega_2 + \omega_3, && p_3 = w_1\omega_1^2 + w_1\omega_2 + w_2\omega_1 + w_3. \\ &\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Mit Hilfe einer Unbestimmten z lassen sich die Spezialfälle in eine einzige Formel konzentrieren

$$\begin{aligned} 1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \ldots = 1 &+ \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \omega_3 z^3 + \ldots \\ &+ (\omega_1 z + \omega_2 z^2 + \omega_3 z^3 + \ldots)^2 \\ &+ (\omega_1 z + \omega_2 z^2 + \omega_3 z^3 + \ldots)^3 \\ &+ \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \ldots = &\; w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + \ldots \\ &+ (w_1 z + w_2 z^2 + \ldots)(\omega_1 z + \omega_2 z^2 + \ldots) \\ &+ (w_1 z + w_2 z^2 + \ldots)(\omega_1 z + \omega_2 z^2 + \ldots)^2 \\ &+ \ldots . \end{aligned}$$

Der Koeffizient von z^n in der 1ten, 2ten, 3ten, ... Zeile rechts gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß der herumirrende Punkt in der Zeitstrecke $2n-2 < t \leqq 2n$ den Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ das 1te, 2te, 3te, ... Mal passiert. Die rechten Seiten dieser Formeln lassen sich noch etwas anders schreiben

$$1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \ldots = \frac{1}{1 - \omega_1 z - \omega_2 z^2 - \omega_3 z^3 - \ldots},$$

$$p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \ldots = \frac{w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + \ldots}{1 - \omega_1 z - \omega_2 z^2 - \omega_3 z^3 + \ldots}.$$

Ich schreibe diese Formeln noch in der Form

$$(14_0) \quad 1 - \omega_1 z - \omega_2 z^2 - \omega_3 z^3 - \ldots = \frac{1}{1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \ldots},$$

$$(14_2) \quad w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + \ldots = \frac{p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \ldots}{1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \ldots}.$$

Die Kette, die $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ mit W_n verbindet, wird geschlossen durch die Formeln

$$(15_0) \quad \Omega_n = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n,$$

$$(15_2) \quad W_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n,$$

die unmittelbar aus der Definition der darin auftretenden Größen folgen.

Ich will noch die Ungleichung

$$(16) \quad p_{n+1} < \pi_n$$

anführen, die aus (13_0), (13_2), (11), (11′) folgt, und die Grenzgleichungen

$$(17) \quad \lim_{n=\infty} n^{\frac{d}{2}} \pi_n = \lim_{n=\infty} n^{\frac{d}{2}} p_n = 2\left(\frac{d}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}},$$

die sich aus (13_0), (13_2) und (12) ergeben.

5. Gemäß (17) sind die drei Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} p_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}$$

entweder alle drei konvergent oder alle drei divergent. Nun ist die letzte Reihe divergent für $d = 1, 2$ und konvergent für $d = 3, 4, 5, \ldots$. Es folgt somit aus (14_0)

$$1 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \ldots = 0 \qquad \text{für} \quad d = 1, 2$$

$$1 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \ldots = \frac{1}{1 + \pi_1 + \pi_2 + \ldots} > 0 \quad \text{für } d = 3, 4, 5, \ldots$$

nach dem Abelschen Stetigkeitssatz der Potenzreihen. Das besagt nach (15_0)

$$\lim_{n=\infty} \Omega_n = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots = 1 \text{ für } d = 1, 2; \ < 1 \text{ für } d = 3, 4, 5, \ldots.$$

Aus (14_2), (15_2) ergibt sich im Falle der Divergenz, d. h. für $d = 1, 2$

$$\lim_{n=\infty} W_n = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots = \lim_{z=1} \frac{p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \ldots}{1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \ldots} = \lim_{n=\infty} \frac{p_n}{\pi_n} = 1$$

mit Benutzung von (17), nach einem Satz von Cesàro[5]). Im Falle der Konvergenz ($d = 3, 4, 5, \ldots$) ist

$$\lim_{n=\infty} W_n = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots}{1 + \pi_1 + \pi_2 + \ldots} < 1,$$

mit Berücksichtigung von (16). Damit ist die erste eingangs ausgesprochene Behauptung voll bewiesen.

6. Es bleibt noch die Aufgabe über die Begegnung von zwei herumirrenden Punkten zu behandeln. Der eine Punkt soll im Koordinatenanfangspunkt $0, 0, \ldots, 0$, der andere im Knotenpunkt $a_1, a_2, \ldots, a_d$ seine Irrfahrt im Moment $t = 0$ beginnen. Um die Umstände zu präzisieren, unter welchen sich die beiden treffen können, unterscheide ich vier Fälle:

0) $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_d| = 0$, die Ausgangspunkte identisch.

1) $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_d| = 1$, die Ausgangspunkte benachbart.

2) $a_1 + a_2 + \ldots + a_d \equiv 0 \pmod 2$, $\quad |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_d| \geqq 2$.

3) $a_1 + a_2 + \ldots + a_d \equiv 1 \pmod 2$, $\quad |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_d| \geqq 3$.

Ich bezeichne die Zeitspanne $n - 1 < t \leqq n$ kurz als die „n-te Zeitspanne". Die Koordinaten der beiden herumirrenden Punkte im Moment $t = n - 1$, zu Anfang der n-ten Zeitspanne, seien $x_1', x_2', \ldots, x_d'$ bzw. $x_1'', x_2'', \ldots, x_d''$. Nach der Begründung von Formel (1) ist

$$(18) \qquad x_1' + x_2' + \ldots + x_d' - x_1'' - x_2'' - \ldots - x_d'' \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \pmod 2 \text{ in den Fällen } \begin{Bmatrix} 0)\ 2) \\ 1)\ 3) \end{Bmatrix}.$$

Wie können die beiden herumirrenden Punkte sich in der n-ten Zeitspanne begegnen? (Begegnen heißt mindestens in einem Zeitpunkt denselben Raumpunkt einnehmen.) In den Fällen 1), 3) muß die Differenz an der linken Seite von (18) $= \pm 1$ sein, d. h. die beweglichen Punkte müssen sich in benachbarten Knotenpunkten befinden; sie begegnen sich dann in der Mitte der dazwischen liegenden Strecke von der Länge 1, sich kreuzend, im Moment $t = n - \frac{1}{2}$. In den Fällen 0), 2) können die beiden wandernden Punkte, gemäß (18), im Moment $t = n - 1$ sich *nicht* in benachbarten Knotenpunkten befinden; sie befinden sich also entweder in demselben Knotenpunkt und reisen von dort zusammen weiter, dies

[5]) Cesàro, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis. Deutsch von G. Kowalewski (Leipzig 1904), S. 279–280.

ist eine Art von Begegnung; oder sie treffen sich erst am Ende der Zeitspanne, zur Zeit $t = n$, und diese ist die andere mögliche Art von Begegnung. Haben sich die beiden Punkte in der n-ten Zeitspanne begegnet, in welcher gegenseitigen Lage befinden sie sich im Zeitpunkt $t = n$? Entweder in benachbarten Knotenpunkten, in den Fällen 1) und 3), oder in demselben Knotenpunkt, in den Fällen 0) und 2). In den Fällen 0) und 1) stellen also die wandernden Punkte am Ende jeder Zeitspanne, worin sie sich begegneten, ihre ursprüngliche gegenseitige Lage her, die sie zur Zeit $t = 0$ innehatten.

Ich betrachte folgende Wahrscheinlichkeiten:

die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden herumirrenden Punkte sich in der n-ten Zeitspanne begegnen; diese Wahrscheinlichkeit sei bezeichnet mit

$$\pi_n,\ \bar{\pi}_n,\ p_n \quad \text{oder} \quad \bar{p}_n,$$

je nachdem der Fall 0), 1), 2) oder 3) vorliegt;

die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden herumfahrenden Punkte sich in der n-ten Zeitspanne begegnen, *ohne sich in irgendeiner der vorangehenden $n-1$ Zeitspannen begegnet zu haben.* Diese Wahrscheinlichkeit sei bezeichnet mit

$$\omega_n,\ \bar{\omega}_n,\ w_n \quad \text{oder} \quad \bar{w}_n,$$

je nachdem der Fall 0), 1), 2) oder 3) vorliegt;

die Wahrscheinlichkeit, daß sich die beiden innerhalb der n ersten Zeitspannen begegnen; diese Wahrscheinlichkeit sei bezeichnet mit

$$\Omega_n,\ \bar{\Omega}_n,\ W_n,\ \bar{W}_n,$$

je nach Fall 0), 1), 2), 3).

Die Wahrscheinlichkeit p_n ist ein Bruch; sein Nenner ist die Anzahl der Kombinationen von je zwei Zickzackwegen von der Länge n, der eine von $0, 0, \ldots, 0$, der andere von $a_1, a_2, \ldots, a_d$ ausgehend, d. h. der Nenner ist $(2d)^n \cdot (2d)^n = (2d)^{2n}$. Der Zähler ist die Anzahl sämtlicher Zickzackwege von der Länge $2n$, die die beiden Punkte $0, 0, \ldots, 0$ und $a_1, a_2, \ldots, a_d$ verbinden. Also ist

$$p_n = P_{2n}(a_1, a_2, \ldots, a_d),$$

d. h. hat genau dieselbe Bedeutung, wie vorher in der Formel (13_2), im Falle, wo $a_1 + a_2 + \ldots + a_d$ gerade ist, der hier allein in Betracht kommt. Überhaupt, die Bezeichnungen π_n, ω_n, Ω_n, p_n, w_n, W_n bezeichnen dieselben Wahrscheinlichkeitsbrüche, wie vorher, und damit ist in den Fällen 0) und 2) die Frage erledigt.

Ich kann mir wohl bei Behandlung der Fälle 1), 3) die Einzelheiten der Begründung ersparen und mich auf die Angabe der wesentlichen

Formeln beschränken, deren Analogie mit den vorangehenden auch in der Numerierung hervorgehoben ist.

$$(13_1) \qquad \bar{\pi}_n = \frac{1}{2d} P_{2n-1}(1, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$(13_2) \qquad \bar{p}_n = \frac{1}{2d} P_{2n-1}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_d)$$

$$(14_1) \qquad 1 - \bar{\omega}_1 z - \bar{\omega}_2 z^2 - \bar{\omega}_3 z^3 - \ldots = \frac{1}{1 + \bar{\pi}_1 z + \bar{\pi}_2 z^2 + \ldots}$$

$$(14_2) \qquad \bar{w}_1 z + \bar{w}_2 z^2 + \bar{w}_3 z^3 + \ldots = \frac{\bar{p}_1 z + \bar{p}_2 z^2 + \ldots}{1 + \bar{\pi}_1 z + \bar{\pi}_2 z^2 + \ldots}$$

$$(15_1) \qquad \bar{\Omega}_n = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \ldots + \bar{\omega}_n$$

$$(15_2) \qquad \bar{W}_n = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \ldots + \bar{w}_n$$

$$(16') \qquad \bar{p}_{n+1} < \bar{\pi}_n$$

$$(17') \qquad \lim_{n=\infty} n^{\frac{d}{2}} \bar{\pi}_n = \lim_{n=\infty} n^{\frac{d}{2}} \bar{p}_n = \frac{1}{d}\left(\frac{d}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}}.$$

Aus diesen Formeln kommt man, wie unter 5, zu dem Resultat, daß

$$\lim_{n=\infty} \bar{\Omega}_n = 1, \quad \lim_{n=\infty} \bar{W}_n = 1 \qquad \text{für } d = 1, 2$$

$$\lim_{n=\infty} \bar{\Omega}_n < 1, \quad \lim_{n=\infty} \bar{W}_n < 1 \qquad \text{für } d = 3, 4, 5, \ldots$$

w. z. b. w.

7. Der eingeschlagene Weg eignet sich auch zur numerischen Berechnung der betrachteten Wahrscheinlichkeiten. Ich behandle einen Fall, wo das Resultat besonders einfach ausfällt.

Man kann (15_0) auch so schreiben

$$1 + (1 - \Omega_1) z + (1 - \Omega_2) z^2 + (1 - \Omega_3) z^3 + \ldots = \frac{1 - \omega_1 z - \omega_2 z^2 - \ldots}{1 - z},$$

woraus nach (14_0)

$$(19) \quad 1 + (1 - \Omega_1) z + (1 - \Omega_2) z^2 + \ldots = \frac{1}{(1 - z)(1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \ldots)}$$

folgt. Nun ist im Falle $d = 1$ nach (3), (13_0)

$$\pi_n = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \qquad (d = 1),$$

also

$$1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \ldots = \frac{1}{\sqrt{1 - z}} \qquad (d = 1),$$

woraus nach (19)

$$1 + (1 - \Omega_1) z + (1 - \Omega_2) z^2 + \ldots = \frac{1}{\sqrt{1 - z}}$$

folgt. Kurzum, es ergibt sich im Falle $d = 1$ zusammengefaßt

$$1 - \Omega_n = \pi_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \qquad (d = 1).$$

Dies Resultat läßt sich, gemäß der Interpretation unter 1, so lesen: Wenn $2n$ Würfe mit einer Münze n-Mal Wappen und n-Mal Schrift ergeben, so sagt man, daß das Spiel sich mit dem $2n$-ten Wurf „ausgleicht“. Daß das Spiel mit dem $2n$-ten Wurf sich ausgleicht, ist ebenso wahrscheinlich (oder unwahrscheinlich), wie das Vorkommnis, daß das Spiel sich während $2n$ Würfen überhaupt nie ausgleicht (weder mit dem 2-ten, noch mit dem 4-ten, ... noch mit dem $2n$-ten Wurf).

Im Falle $d = 2$ ergibt sich aus (4), (13_0), (14_0)

$$1 - \omega_1 z - \omega_2 z^2 - \omega_3 z^3 - \ldots = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-zu^2)}}\right)^{-1}$$

Daß die Koeffizienten $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ in dieser Entwicklung positiv sind, wäre direkt zu beweisen, und es wäre zu entscheiden, ob sie mit wachsendem n stets abnehmen.

(Eingegangen am 12. 1. 1921.)

Singuläre Punkte ebener algebraischer Kurven.

Von

Heinrich W. E. Jung in Halle a. d. S.

Einleitung.

Wie Herr Max Noether gezeigt hat[1]), kann man jeden singulären Punkt einer ebenen algebraischen Kurve in eine Anzahl von gewöhnlichen mehrfachen Punkten auflösen, und ihn also aus diesen bestehend denken. Diese Punkte liegen dem singulären Punkte unendlich nah. Die Auflösung geschieht durch eine Reihe von einfachen quadratischen Cremonatransformationen. Es kann dann der Beitrag, den der singuläre Punkt zur Ordnung des Divisors der mehrfachen Punkte liefert, so berechnet werden, als ob die Kurve die gewöhnlichen mehrfachen Punkte hätte, aus denen der singuläre Punkt besteht, und als ob diese Punkte getrennt lägen. Sind zwei Kurven C_1, C_2 gegeben, die sich in einem Punkte S treffen, der für eine oder beide Kurven singulär ist, so kann man den Punkt S in eine endliche Zahl von ihm unendlich benachbarten Punkten $O_1, O_2, \ldots, O_p$ zerlegen, und zwar so, daß in jedem dieser Punkte die Kurven C_1 und C_2 gewöhnliche mehrfache Punkte haben. Es kann dabei eintreten, daß durch einige der Punkte die Kurve C_1 oder C_2 überhaupt nicht hindurchgeht. Man kann dann die Zahl der Schnittpunkte von C_1 und C_2 in S so berechnen, daß man S durch die Punkte $O_1, O_2, \ldots, O_p$ ersetzt und diese als getrennt liegend annimmt. In anderen Fällen kann es sein, daß man einen singulären Punkt nicht ohne weiteres durch die gewöhnlichen mehrfachen Punkte ersetzen darf, aus denen er nach Herrn Noether besteht. Das darf man z. B. nicht bei der Berechnung des Beitrages eines solchen Punktes zur Ordnung des Divisors der stationären Punkte, da ja gewöhnliche mehrfache Punkte hierzu keinen Beitrag liefern.

Die Noethersche Methode ist nichts anderes als eine passende Abänderung in der Definition der Stellen in einem rationalen Körper von

[1]) Math. Ann. 9 und 23, sowie Rend. d. Circolo Mat. di Palermo 4 (1890).

zwei unabhängigen Veränderlichen und läßt sich ohne weiteres auf beliebige algebraische Körper anwenden. Man kann damit Kurvenscharen auf einer algebraischen Fläche mit festen Punkten verwandeln in solche ohne Basispunkte, was eine große Vereinfachung bedeutet.

Die hier vorliegenden Verhältnisse in einer übersichtlichen und durchsichtigen Form darzustellen, ist der Zweck der folgenden Arbeit. Über denselben Gegenstand ist eine Arbeit von Herrn Paul Roth erschienen[2]), die aber nicht von der Einfachheit ist, die sich erreichen läßt. Ich beschränke mich auf rationale Körper. Die Verallgemeinerung auf beliebige algebraische Körper macht keine Schwierigkeiten.

1. Der Körper T der rationalen Funktionen von x, y. Primteiler erster Art.

Wir betrachten den Körper T der rationalen Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen x, y. Ist x_0, y_0 irgendein Wertepaar von x, y, so setzen wir für die Umgebung von x_0, y_0

$$x - x_0 = u, \qquad y - y_0 = v. \tag{1}$$

Hierin sind $x - x_0$ oder $y - y_0$ zu ersetzen durch x^{-1}, y^{-1}, wenn x_0 oder y_0 unendlich ist. Es werden dann die Funktionen aus T rationale Funktionen der beiden Hilfsgrößen u, v. Dadurch wird, wie wir sagen, eine *Stelle S von T mit ihrer Umgebung* definiert. Jedem endlichen Wertepaare u, v entspricht eine Stelle von T in der Umgebung von S und dem Wertsystem $u = v = 0$ entspricht die Stelle S selbst.

Es sei $G(x,y)$ ein irreduzibles Polynom von x, y. Für die Umgebung einer Stelle S wird

$$G(x,y) = \frac{P(u,v)}{u^p v^q},$$

wo $P(u,v)$ eine irreduzible ganze rationale Funktion von u, v sein soll und p und q ganze nicht negative Zahlen. Es sind p, q beide Null, wenn x und y an der Stelle S beide endlich sind. Wir ordnen jedem irreduziblen Polynom G einen *Primteiler P* (*erster Stufe*) *erster Art* zu und nennen $P(u,v)$ *die zugeordnete Funktion von P für die Stelle S*. Wir sagen, der Primteiler geht durch S, wenn $P(u,v)$ für $u = v = 0$ verschwindet. Die zugeordneten Funktionen sollen nur bestimmt sein bis auf einen Faktor, der eine Einheit für die Stelle S ist, d. h. eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v, die für $u = v = 0$ nicht verschwindet. Geht also P nicht durch S, so kann z. B. die zugeordnete Funktion für S gleich 1 angenommen werden. Wir wollen auch umgekehrt jedem

[2]) P. Roth, Monatshefte für Math. u. Physik 27, S. 121–162.

irreduziblen Polynom $P(u,v)$ einen Primteiler entsprechen lassen. Dann kommen zu den bisher definierten noch zwei Primteiler hinzu. Ist nämlich an der Stelle S etwa x_0 unendlich, also $\frac{1}{x} = u$, so ist u die zugeordnete Funktion eines Primteilers, den wir mit L bezeichnen. Er ist auch definiert durch $x = \infty$, y beliebig. Entsprechend bezeichnen wir den Primteiler, der durch x beliebig, $y = \infty$, definiert ist, mit M.

Es sei P ein Primteiler und S eine Stelle, durch die P geht. $P(u,v)$ sei die zugeordnete Funktion von P für die Stelle S. Es sei R eine Funktion aus T und $R(u,v)$ die Darstellung von R in der Umgebung von S. Wenn dann $R(u,v)$ das Polynom $P(u,v)$ in der α-ten Potenz enthält, sagen wir R enthält den Primteiler P in der α-ten Potenz. Es gilt der Satz, *daß sich jede Funktion aus R auf eine und nur eine Art in eine endliche Zahl von Primteilern erster Art zerlegen läßt.*

Ein Produkt von irgendwelchen Primteilern, jeden in einer ganzzahligen Potenz genommen, heißt *Divisor*. Ist keine der Potenzen negativ, so heißt der Divisor *ganz*. Die Divisoren werden in *Klassen* eingeteilt, indem zwei Divisoren dann und nur dann zu derselben Klasse gehören, wenn ihr Quotient eine Funktion des Körpers T ist. Divisoren derselben Klasse heißen zueinander *äquivalent* ($\sim$).

Die Funktionen des Körpers T bilden eine Klasse, die die *Hauptklasse* heißt. Sie enthält auch den Divisor 1. Von besonderer Wichtigkeit ist noch die *Differentialklasse* oder die *kanonische Klasse*, die folgendermaßen definiert ist. In der Umgebung jeder Stelle S haben wir

$$dx\,dy = Q(u,v)\,du\,dv. \tag{2}$$

Enthält $Q(u,v)$ die α-te Potenz der zugeordneten Funktion eines Primteilers P, so nehmen wir P in einen zu bildenden Divisor K in der α-ten Potenz auf. Die Klasse (K), der K angehört, ist die kanonische Klasse. Es ist übrigens, wie man leicht sieht,

$$K = L^{-2} M^{-2}. \tag{3}$$

2. Primteiler zweiter Art.

Ist $G(x,y)$ das Polynom, dessen Zähler der Primteiler P ist, so entspricht dem Primteiler P die Kurve $G(x,y) = 0$ oder auch der algebraische Körper einer Veränderlichen, in den T für $G = 0$ übergeht. Wir bezeichnen diesen Körper auch mit P, ja wir nennen ihn geradezu den Primteiler P. Den Übergang von T zum Körper P drücken wir dadurch aus, daß wir sagen, wir setzen $P = 0$. Der Körper P steht zu T in der Beziehung, daß jeder Funktion aus T eine aus P entspricht und daß die Gleichungen, die zwischen den Funktionen aus T bestehen, auch zwischen

den ihnen entsprechenden Funktionen aus P bestehen. Wir werden so dazu geführt, jeden Körper P einer Veränderlichen, der in dieser Beziehung zu T steht, einen Primteiler erster Stufe zu nennen. Eine Funktion R aus T enthält dann P in positiver Potenz, wenn ihr in P die Zahl 0 entspricht, wenn sie also für $P = 0$ zu Null wird.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Es werden x und y für $P = 0$ nicht beide konstant. Dann ist P einer der in Nr. 1 definierten Primteiler erster Art.

b) Es werden x und y für $P = 0$ beide konstant, etwa gleich x_0, y_0. Wir bezeichnen die Stelle x_0, y_0 mit S. Es müssen dann für $P = 0$ die Hilfsgrößen u, v beide verschwinden. Da aber für $P = 0$ jede Funktion aus T in eine ganz bestimmte Funktion des Körpers P übergeht und nicht etwa unbestimmt werden darf, so müssen u und v in voneinander abhängiger Weise der Null zustreben. Dies führt zu folgender Definition.

Es sei

$$v_1(u) = a_1 u^{\alpha_1} + a_2 u^{\alpha_2} + \cdots + a_{\nu-1} u^{\alpha_{\nu-1}} + t u^{\alpha_\nu}, \tag{4}$$

wo $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_\nu$ positive rationale Zahlen sein sollen, wo die a_i Konstante sind und t ein Parameter ist. Wir stellen in der Umgebung von S alle Funktionen aus T als rationale Funktionen von u, v dar, setzen $v = v_1(u)$ und entwickeln nach steigenden Potenzen von u. Setzen wir dann $u = 0$, so gehen die Funktionen aus T über in rationale Funktionen von t. Wir erhalten so einen Körper einer Veränderlichen, der nach unserer Definition ein Primteiler von T ist. Sein Geschlecht ist Null. Wir sagen, er *gehört zur Stelle* S und nennen die definierten *Primteiler von der zweiten Art*. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{B}$ unter Hinzufügung eines Index. Der durch (4) definierte Primteiler heiße $\mathfrak{B}_1$.

Es sei in (4) der Hauptnenner aller α_i gleich β_1'' und der der ersten $\nu - 1$ gleich γ und es sei $\beta_1'' = \delta\gamma$. Wenn wir dann u γ-mal den Punkt $u = 0$ umlaufen lassen, so ändert sich in (4) nur der letzte Summand, der eine primitive δ-te Einheitswurzel ω als Faktor aufnimmt. Dasselbe erreichen wir dadurch, daß wir t durch $t\omega$ ersetzen. Es seien $v_2, v_3, \ldots, v_{\beta_1''}$ die zu (4) konjugierten Entwicklungen. Wir setzen

$$\mathsf{B}_1 = (v - v_1)(v - v_2)\ldots(v - v_{\beta_1''}) = \operatorname{Norm}(v - v_1)$$

und nennen B_1 die *Eichfunktion* von $\mathfrak{B}_1$. Ist $\alpha_\nu = \beta_1'/\beta_1''$, so ist B_1 eine ganze rationale Funktion von u, v vom Grade (β_1', β_1''). Lassen wir u den Punkt $u = 0$ γ-mal umlaufen, so ändert sich B_1 nicht, da die v_i sich nur vertauschen. Nach dem eben Bemerkten darf sich also B_1 auch

nicht ändern, wenn man t durch $t\omega$ ersetzt. Es ist also B_1 eine ganze rationale Funktion von t^δ. Wir setzen

$$(5) \qquad t^\delta = \tau_1, \qquad \mathsf{B}_1 \equiv \mathsf{B}_1(u, v; \tau_1) \equiv \mathrm{Norm}\,(v - v_1).$$

Es sei R eine Funktion aus T, die für $\mathfrak{B}_1 = 0$ nicht konstant wird. Es ist dann, nach steigenden Potenzen von u entwickelt,

$$R(u, v_1) = r(t) + (u),$$

wo (u) für $u = 0$ verschwindet. Lassen wir u wieder den Punkt $u = 0$ γ-mal umlaufen, so ändert sich $r(t)$ nicht, da es von u gar nicht abhängt. Es darf sich also auch $r(t)$ nicht ändern, wenn man t durch $t\omega$ ersetzt, d. h. es ist $r(t)$ eine rationale Funktion von τ_1. Es werden also für $\mathfrak{B}_1 = 0$ die Funktionen aus T rationale Funktionen von τ_1. Andererseits gehört τ_1 dem Körper $\mathfrak{B}_1$ an. Denn die Funktion

$$\frac{\mathsf{B}_1(u, v; \tau_1')}{\mathsf{B}_1(u, v; \tau_1'')}$$

geht für $\mathfrak{B}_1 = 0$ in $(\tau_1 - \tau_1')/(\tau_1 - \tau_1'')$ über.

Ist R wieder eine Funktion aus T und beginnt die Entwicklung von $R(u, v_1(u))$ nach steigenden Potenzen von u mit der λ-ten Potenz von $u^{\frac{1}{\beta_1''}}$, so sagen wir, R ist durch die λ-te Potenz von $\mathfrak{B}_1$ teilbar. Also ist $\mathfrak{B}_1$ in einer Funktion aus T immer in einer ganzzahligen Potenz enthalten, wenn es überhaupt darin enthalten ist. Andererseits gibt es immer eine rationale Funktion von u, v, also eine Funktion aus T, die für $v = v_1(u)$ genau durch die erste Potenz von $u^{\frac{1}{\beta_1''}}$, also auch von $\mathfrak{B}_1$ teilbar wird. Wir können also die Teilbarkeit durch einen Divisor erster oder zweiter Art gleichmäßig so definieren: *Ist P ein Primteiler des Körpers T, so gibt es immer eine Funktion Π aus T, die von möglichst niedriger Ordnung Null wird für $P = 0$. Ist dann R irgendeine Funktion aus T, und wird $R\,\Pi^{-\lambda}$ für $P = 0$ weder Null noch unendlich, so ist R genau durch P^λ teilbar oder enthält P genau in der λ-ten Potenz.*

Wird eine Funktion R aus T an einer Stelle S Null, so enthält sie offenbar jeden zu dieser Stelle gehörenden Primteiler zweiter Art in positiver Potenz, woraus folgt, daß jede Funktion aus T unendlich viele Primteiler zweiter Art enthält. Man kann zwar von jedem Primteiler zweiter Art angeben, ob und in welcher Potenz er in einer Funktion aus T enthalten ist, aber man kann nicht explizit alle in einer Funktion aus T enthaltenen Primteiler zweiter Art angeben. Das ist auch nicht notwendig, da ja eine Funktion aus T schon durch die in ihr enthaltenen Primteiler erster Art vollkommen bestimmt ist. Wir können die Prim-

teiler zweiter Art, die in einer Funktion enthalten sind, auf die in ihr enthaltenen Primteiler erster Art verteilen, indem wir die Teilbarkeit eines Primteilers P erster Art durch einen zweiter Art in folgender Weise definieren. *Ist $P(u, v)$ die zugeordnete Funktion von P für die Stelle S, zu der der Primteiler zweiter Art $\mathfrak{B}_1$ gehört, und ist $P(u, v_1(u))$ durch $u^{\frac{\lambda}{\beta_1''}}$ teilbar, so sagen wir, der Primteiler ist durch die λ-te Potenz von $\mathfrak{B}_1$ teilbar.* So sieht man deutlich, wie die Primteiler zweiter Art durch die der ersten Art mitbestimmt sind.

3. Andere Definition der Stellen des Körpers T.

Es sei wieder S eine Stelle von T und u, v seien die Hilfsgrößen, durch die wir in der Umgebung von S die Funktionen aus T darstellen. Wir können dann statt u, v auf mannigfache Art neue Hilfsgrößen, die wir mit λ, μ bezeichnen wollen, einführen. Die Transformationen, die wir dazu verwenden, sind von der Art, wie sie Herr Noether zur Auflösung von Singularitäten algebraischer Kurven verwandt hat; und wir werden sie hier auch dazu benutzen. Zunächst setzen wir

$$(6) \qquad u = a_1 u' + b_1 v', \qquad v = c_1 u' + d_1 v', \qquad a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0.$$

Es entspricht jedem Wertepaar u, v ein Wertepaar u', v' und umgekehrt, da ja nur endliche Werte in Frage kommen. Wir setzen dann

$$(7) \qquad \text{I. } u' = u_1 v_1, \quad v' = u_1; \qquad \text{II. } u' = u^{(1)}, \quad v' = u^{(1)} v^{(1)}$$

und verwenden I für $|v_1| < r$, II für $|v^{(1)}| \leqq \frac{1}{r}$, wo r eine positive Zahl sein soll. Es gilt also

$$\text{I, wenn } \left|\frac{u'}{v'}\right| < r, \qquad \text{II, wenn } \left|\frac{u'}{v'}\right| \geqq r,$$

so daß jedem Wertepaar u', v' in der Umgebung von S ein Wertepaar u_1, v_1 oder $u^{(1)}, v^{(1)}$ entspricht und umgekehrt. Definieren wir jetzt eine Stelle durch die Werte, die u_1, v_1 oder $u^{(1)}, v^{(1)}$ dort haben, so entspricht jeder Stelle in der Umgebung von S wieder eine Stelle, aber *S selbst entsprechen unendlich viele Stellen*, da jeder Stelle, wo u_1 oder $u^{(1)}$ gleich Null ist, während v_1 oder $v^{(1)}$ endlich ist, die Stelle $u' = v' = 0$, d. h. S entspricht. Alle diese Stellen nennen wir *Stellen erster Ordnung* oder genauer Stellen, die S in erster Ordnung unendlich nahe sind, eine Bezeichnung, die von Herrn Noether eingeführt ist. S selbst nennen wir eine *Stelle nullter Ordnung*. Es sei S_1 eine Stelle erster Ordnung und es habe dort v_1 den Wert l_1. Dann setzen wir

$$u_1 = \lambda, \qquad v_1 = l_1 + \mu$$

und haben wegen (6) und (7)

$$u = (a_1 l_1 + b_1 + a_1 \mu)\lambda, \qquad v = (c_1 l_1 + d_1 + c_1 \mu). \tag{8}$$

Für kleine Werte von λ, μ erhalten wir dann alle Stellen, die in der Umgebung von S_1 liegen. Da die Funktionen aus T in der Umgebung von S rational in u, v sind, so sind sie in der Umgebung von S_1 rationale Funktionen der Hilfsgrößen λ, μ. Natürlich liefert uns die Stelle S_1 mit ihrer Umgebung nicht die ganze Umgebung von S. Aber eine endliche Zahl von Stellen erster Ordnung mit ihren Umgebungen liefert uns die ganze Umgebung von S, z. B. die beiden Stellen $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ und $u^{(1)} = 0$, $v^{(1)} = 0$ bei passender Definition ihrer Umgebungen. Die Stellen erster Ordnung haben die wesentliche Eigenschaft der Stellen nullter Ordnung, nämlich, daß in ihrer Umgebung die Funktionen aus T rationale Funktionen zweier Hilfsgrößen werden, die dem Körper T selbst angehören, und dasselbe gilt auch von den nun zu definierenden Stellen höherer Ordnung.

Gerade so wie wir die Stelle S in unendlich viele Stellen erster Ordnung zersprengt haben, können wir auch eine oder mehrere Stellen erster Ordnung in unendlich viele Stellen verwandeln, die wir dann mit Herrn Noether *Stellen zweiter Ordnung* nennen; und so können wir fortfahren. Wir erhalten das Ergebnis:

Ist S eine Stelle des Körpers T und sind u, v die zu ihr gehörigen Hilfsgrößen, so können wir statt u, v neue Hilfsgrößen λ, μ einführen, die rationale Funktionen von u, v sind, durch Gleichungen von der Form

$$u = g(\lambda, \mu), \qquad v = h(\lambda, \mu), \tag{9}$$

wo g und h ganze rationale Funktionen von λ, μ sind, und zwar so, daß kleinen Werten von λ, μ Werte von u, v in der Umgebung von S entsprechen. Durch eine endliche Zahl von solchen Transformationen erhält man alle Stellen von T in der Umgebung von S.

Durch Benutzung der Transformation (9) werden die Funktionen aus T rationale Funktionen von λ, μ, und für kleine Werte von λ, μ wird uns dadurch eine Stelle von T mit ihrer Umgebung definiert. Wir bezeichnen diese Stelle mit S_0; sie sei etwa von der r-ten Ordnung. Jede der Transformationen der Form (9) definiert uns so eine aus S hervorgegangene Stelle höherer Ordnung. Es sind jetzt die Stellen des Körpers T anders definiert als in Nr. 1, indem die Stelle S als solche verschwunden ist und statt ihrer unendlich viele andere Stellen aufgetreten sind. Wenn auch die in Nr. 1 verwandte Definition die einfachste und natürlichste ist, so ist doch die hier benutzte Definition der früheren durchaus gleichberechtigt. Welche Definition in einem gegebenen Fall die praktischere

ist, hängt ganz von den Umständen ab, wie wir noch weiter unten sehen werden. Die Abänderung in der Definition der Stellen ist aufzufassen als eine Cremona-Transformation, wenn sie auch nicht von der üblichen Art ist, da ja die unabhängigen Veränderlichen dieselben bleiben und nur für eine Stelle (oder mehrere) neue Hilfsgrößen eingeführt werden. Es sind eben die Stellen eines algebraischen Körpers zweier Veränderlichen durch Angabe der unabhängigen Veränderlichen noch nicht definiert.

Die einzelnen Transformationen, die zu (9) führen, können wir in der Form annehmen

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} u=(\alpha_1+a_1 v_1)u_1, & v=(\gamma_1+c_1 v_1)u_1, \\ u_1=(\alpha_2+a_2 v_2)u_2, & v_1=(\gamma_2+c_2 v_2)u_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ u_{r-1}=(\alpha_r+a_r v_r)u_r, & v_{r-1}=(\gamma_r+c_r v_r)u_r, \end{array}\right.$$

$$(11)\qquad u_r=\lambda, \qquad v_r=\mu.$$

Hieraus ergeben sich folgende Eigenschaften der Polynome g, h in (9). Zunächst haben g und h den gemeinsamen Faktor λ. Denn nach den Gleichungen (10) haben u und v den Faktor u_1, und u_1 ist durch u_2, u_2 durch u_3 usw. teilbar, schließlich u_{r-1} durch $u_r=\lambda$. Ferner ist ein Faktor von g oder h, der für $\lambda=\mu=0$ verschwindet, immer gleich λ oder μ. Wir können also die Polynome g und h in der Form schreiben:

$$(12)\qquad g=\lambda^{p_1}\mu^{q_1}E_1(\lambda,\mu), \qquad h=\lambda^{p_2}\mu^{q_2}E_2(\lambda,\mu),$$

wo E_1 und E_2 Polynome sind, die für $\lambda=\mu=0$ nicht verschwinden, und wo $p_1 p_2>0$. Das beweisen wir durch den Schluß von $r-1$ auf r. Daß für $r=1$ die Behauptung richtig ist, sieht man sofort. Nun sei sie auch richtig für $r-1$ quadratische Transformationen, wie sie in (10) angegeben sind. Dann ergibt sich aus den $r-1$ letzten der Gleichungspaare (10)

$$u_1=\lambda^{r_1}\mu^{s_1}e_1(\lambda,\mu), \qquad v_1=\lambda^{r_2}\mu^{s_2}e_2(\lambda,\mu),$$

wo e_1 und e_2 für $\lambda=\mu=0$ nicht verschwinden. In Verbindung mit dem ersten der Gleichungspaare (10) ergibt sich

$$u=g(\lambda,\mu)=\lambda^{r_1}\mu^{s_1}(\alpha_1+a_1\lambda^{r_2}\mu^{s_2}e_2)e_1,$$

$$v=h(\lambda,\mu)=\lambda^{r_1}\mu^{s_1}(\gamma_1+c_1\lambda^{r_2}\mu^{s_2}e_2)e_1,$$

woraus sich die Richtigkeit unserer Behauptung auch für r quadratische Transformationen der Art (10) ergibt.

4. Kurven.

Es sei P ein Primteiler, der durch die Stelle S geht, und $P(u, v)$ sei seine zugeordnete Funktion für S, so daß $P(0, 0) = 0$. Wir betrachten P in der Umgebung der Stelle S_0, die wir durch die Transformation (9) erhalten. Wir unterscheiden zwei Fälle. Im ersten sei in (12) $q_1 q_2 = 0$, im zweiten $q_1 q_2 > 0$. Im ersten Fall wird für die Umgebung von S_0

$$P(u, v) = \lambda^p \mathfrak{P}(\lambda, \mu), \qquad (p > 0), \tag{13}$$

im zweiten

$$P(u, v) = \lambda^p \mu^q \mathfrak{P}(\lambda, \mu), \qquad (p > 0,\ q > 0), \tag{14}$$

wo beidemal $\mathfrak{P}(\lambda, \mu)$ ein Polynom ist. Der Körper T ist der Körper der rationalen Funktionen von x, y oder von u, v oder von λ, μ. Es geht T über in den Primteiler P, wenn wir festsetzen, daß zwischen u und v die Gleichung $P(u, v) = 0$ bestehen soll. Aus (13) und (14) folgt, daß $P(u, v)$ Null wird, wenn $\lambda = 0$ oder $\mathfrak{P}(\lambda, \mu) = 0$ und im zweiten Falle auch, wenn $\mu = 0$. Setzen wir aber fest, daß zwischen λ und μ eine algebraische Gleichung bestehen soll, so geht der Körper T, der ja auch aus allen rationalen Funktionen von λ, μ besteht, über in einen Körper einer Veränderlichen, also in einen Primteiler. Der Körper, der durch $\lambda = 0$ definiert wird, kann nicht der Körper P sein, da für $\lambda = 0$ u und v beide Null werden. Es kann also der durch $\lambda = 0$ definierte Körper nur ein Primteiler zweiter Art sein. Er heiße $\mathfrak{B}_1$. Ebenso kann im zweiten Falle der durch $\mu = 0$ definierte Körper nur ein Primteiler zweiter Art sein. Daraus folgt, daß der Primteiler $\mathfrak{P}$ in der Umgebung von S_0 durch $\mathfrak{P}(\lambda, \mu) = 0$ definiert wird.

Der Körper P ist natürlich ganz unabhängig davon, wie wir die Stellen von T definieren. Aber der Primteiler P ändert sich doch bei anderer Definition der Stellen. Lassen wir dieselben Definitionen gelten wie vorher, so ist $\mathfrak{P}(\lambda, \mu)$ die zugeordnete Funktion von P für die Stelle S_0. Diese wird nicht Null für $\lambda = 0$, d. h. $\mathfrak{B}_1 = 0$, während vorher die zugeordnete Funktion $P(u, v)$ von P für $\mathfrak{B}_1 = 0$ verschwand. Während also vorher nach unserer Definition der Primteiler erster Art P den Primteiler zweiter Art $\mathfrak{B}_1$ enthält, ist das bei der neuen Definition der Stellen nicht mehr der Fall. Damit steht in Zusammenhang, daß jetzt der Primteiler $\mathfrak{B}_1$ durch eine Gleichung zwischen den Hilfsgrößen λ, μ, nämlich durch $\lambda = 0$, definiert wird. Es hat also $\mathfrak{B}_1$ für die Stelle S_0 eine zugeordnete Funktion, nämlich λ. *Es ist mit anderen Worten $\mathfrak{B}_1$ ein Primteiler erster Art geworden.* Um bequem unterscheiden zu können, ob wir einen Primteiler nach der ursprünglichen oder nach der neuen Definition

betrachten, nennen wir ihn im zweiten Falle ***Primkurve.*** Wir bezeichnen ferner die dem Primteiler erster Art P entsprechende Kurve mit $\mathfrak{P}$. Die einem Primteiler zweiter Art entsprechende Kurve bezeichnen wir genau wie den Primteiler. Es sei noch einmal ausdrücklich hervorgehoben, daß die algebraischen Körper P und $\mathfrak{P}$ identisch sind, wenn $\mathfrak{P}$ die dem Primteiler P entsprechende Kurve ist.

Wir teilen die Kurven auch in Kurven erster und zweiter Art ein, je nachdem sie zugeordnete Funktionen haben oder nicht. Dann entspricht einem Primteiler erster Art immer eine Kurve erster Art. Dagegen gibt es Primteiler zweiter Art, denen eine Kurve erster Art entspricht. Ist $\mathfrak{B}_\alpha$ einer dieser Primteiler und ist S_0 eine der neuen Stellen, durch die $\mathfrak{B}_\alpha$ geht, so muß für $\mathfrak{B}_\alpha = 0$ sowohl u wie v verschwinden, es muß also die zugeordnete Funktion $\mathfrak{B}_\alpha(\lambda, \mu)$ von $\mathfrak{B}_\alpha$ für die Stelle S_0 ein gemeinsamer Teiler von u und v sein, also nach dem oben Bewiesenen entweder λ oder μ. Da, wie wir oben gesehen haben, eine endliche Zahl von neuen Stellen mit ihren Umgebungen uns die ganze Umgebung der transformierten Stelle S liefert, so ***gibt es nur eine endliche Zahl von Primteilern zweiter Art, die in Kurven erster Art übergehen.*** Diese seien

$$(15) \qquad \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho.$$

Es sei $\mathsf{B}_k(u, v; \tau_\varkappa)$ die Eichfunktion von $\mathfrak{B}_k$; sie sei in u, v vom Grade (β'_k, β''_k).

Ist P irgendein Primteiler erster Art, und ist $\mathfrak{B}_\alpha$ in P in der Potenz γ_α enthalten, so setzen wir

$$(16) \qquad \mathfrak{B}_1^{\gamma_1} \mathfrak{B}_2^{\gamma_2} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{\gamma_\varrho} = s(P).$$

Die Primkurve $\mathfrak{P}$ unterscheidet sich vom Primteiler P nur dadurch, daß sie die Primteiler $\mathfrak{B}_\alpha$ nicht mehr enthält, so daß die Gleichung besteht

$$(17) \qquad P = \mathfrak{P}\, s(P) = \mathfrak{P}\, \mathfrak{B}_1^{\gamma_1} \mathfrak{B}_2^{\gamma_2} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{\gamma_\varrho}.$$

Diese Gleichung hat nicht nur eine symbolische Bedeutung. Ist nämlich $P(u, v)$ die zugeordnete Funktion von P für die Stelle S und sind $\mathfrak{P}(\lambda, \mu)$, $\mathfrak{B}_i(\lambda, \mu)$ die zugeordneten Funktionen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{B}_i$ für die aus S durch die Substitution (9) hervorgehende Stelle S_0, so besteht die Gleichung

$$(18) \qquad P(u, v) = \mathfrak{P}(\lambda, \mu) \mathfrak{B}_1^{\gamma_1}(\lambda, \mu) \mathfrak{B}_2^{\gamma_2}(\lambda, \mu) \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{\gamma_\varrho}(\lambda, \mu),$$

wenn wir die zugeordnete Funktion einer Kurve für eine Stelle gleich 1 annehmen, wenn die Kurve durch diese Stelle nicht geht. Wir sagen: ***$\mathfrak{P}$ entspricht P und $\mathfrak{P} sP$ geht aus P hervor.***

Wir hatten die an der Stelle S_0 durch $\lambda = 0$ definierte Primkurve mit $\mathfrak{B}_1$ bezeichnet. Es ist $\mathfrak{B}_1$ auch ein Primteiler zweiter Art. Wie ist

seine Definition als solcher? Wir schreiben die zur Stelle S_0 führenden Transformationsformeln (9) in der Form

$$(19) \qquad u = g(\lambda, \mu) = g_0 \lambda^{p_1} + g_1 \lambda^{p_1+1} + \cdots, \quad v = h(\lambda, \mu).$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ergibt sich λ als gewöhnliche Potenzreihe von $u^{\frac{1}{p_1}}$. Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so folgt für v eine Darstellung

$$(20) \qquad v = v^{(1)} = a_1 u^{\alpha_1} + a_2 u^{\alpha_2} + \cdots + a_\nu u^{\alpha_\nu} + \cdots.$$

Hierin seien $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$ von μ unabhängig, also Zahlen, während a_ν von μ wirklich abhängig sei. Um den Körper $\mathfrak{P}_1$ aus dem Körper T zu erhalten, haben wir zwei Möglichkeiten. Einmal können wir die Funktionen aus T mit Hilfe von (19) als rationale Funktionen von λ, μ darstellen und dann $\lambda = 0$ setzen, oder wir können die Funktionen aus T als rationale Funktionen von u, v darstellen, für v die Entwicklung $v^{(1)}$ aus (20) einführen und dann $u = 0$ setzen. Bei der zweiten Methode werden die Funktionen aus T rationale Funktionen des einen Koeffizienten a_ν. Die folgenden Koeffizienten in (20) fallen für $u = 0$ fort, da sie eine höhere Potenz von u zum Faktor haben als a_ν. Daraus ergibt sich, daß

$$(21) \qquad v_1 = a_1 u^{\alpha_1} + a_2 u^{\alpha_2} + \cdots + a_{\nu-1} u^{\alpha_{\nu-1}} + t u^{\alpha_\nu}$$

die den Primteiler $\mathfrak{P}_1$ definierende Funktion sein muß. Den Hauptnenner der Exponenten α_i bezeichnen wir wieder wie oben mit β_1'' und setzen auch wieder

$$(22) \qquad \alpha_\nu = \frac{\beta_1'}{\beta_1''}$$

und verwenden überhaupt die früheren Bezeichnungen.

Es ist λ offenbar eine Funktion aus T, die für $\mathfrak{P}_1 = 0$ von möglichst niedriger Ordnung verschwindet. Sie muß also genau durch $u^{\frac{1}{\beta_1''}}$ teilbar sein. Aus (19) folgt daher, daß

$$(23) \qquad p_1 = \beta_1''.$$

5. Kurvenklassen. Die kanonische Kurvenklasse.

Gerade so wie sich jede Funktion aus T auf eine und nur eine Art in Primteiler erster Art zerlegen läßt, läßt sie sich auch eindeutig in Primkurven erster Art zerlegen. Die zweite Zerlegung geht aus der ersten durch die Transformation (17) hervor. Das Produkt irgendwelcher Primkurven, jede in einer ganzzahligen Potenz, nennen wir eine Kurve. Wir rechnen zwei Kurven in dieselbe Klasse, wenn ihr Quotient eine Funktion des Körpers T ist. Zwei derselben Klasse angehörende Kurven nennen

wir äquivalent ($\sim$). Unter den Klassen sind wieder hervorzuheben einmal die Hauptklasse (1), die den Funktionen aus T entspricht und die die Zahl 1 enthält, und dann die Differentialklasse, die wir mit ($\mathfrak{K}$) bezeichnen. Diese ist nicht identisch mit der kanonischen Klasse (K) der Primteiler, wie wir jetzt zeigen.

Für die Umgebung einer von S verschiedenen Stelle ist es genau wie vorher. Für die Umgebung von S haben wir zunächst wie in (2)

$$dx\,dy = Q(u, v)\,du\,dv.$$

Hier ist Q die zugeordnete Funktion eines Divisors, den wir mit K bezeichnet haben. Für die Umgebung einer der Stellen, die aus S hervorgehen, etwa der Stelle S_0, haben wir weiter

$$du\,dv = B(\lambda, \mu)\,d\lambda\,d\mu.$$

Enthält $B(\lambda, \mu)$ einen irreduziblen Faktor $\mathfrak{P}(\lambda, \mu)$, der für $\lambda = \mu = 0$ verschwindet in der p-ten Potenz, so nehmen wir die Primkurve $\mathfrak{P}$, deren zugeordnete Funktion $\mathfrak{P}(\lambda, \mu)$ ist, in eine zu bildende Kurve $\mathfrak{B}$ in der p-ten Potenz auf. Dies haben wir für alle Stellen zu tun, die aus S hervorgehen. Setzen wir dann

$$\mathfrak{K} = K\mathfrak{B}, \tag{24}$$

so ist für die Umgebung jeder von S verschiedenen Stelle, da für diese Stellen $\mathfrak{B} = 1$ ist,

$$dx\,dy = \mathfrak{K}\,du\,dv$$

und für jede aus S hervorgegangene Stelle ist

$$dx\,dy = \mathfrak{K}\,d\lambda\,d\mu,$$

wo in beiden Fällen unter $\mathfrak{K}$ die zugeordnete Funktion der Kurve $\mathfrak{K}$ für die betreffende Stelle zu verstehen ist. Die Klasse ($\mathfrak{K}$) nennen wir dann die *kanonische Kurvenklasse* des Körpers T.

Es bleibt $\mathfrak{B}$ zu bestimmen. Wir betrachten wieder die Stelle S_0. Zu ihr führen die Transformationen (10), (11), aus denen folgt

$$\begin{aligned} du\,dv &= (\alpha_1 c_1 - \gamma_1 a_1)\,u_1\,du_1\,dv_1, \\ du_1\,dv_1 &= (\alpha_2 c_2 - \gamma_2 a_2)\,u_2\,du_2\,dv_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ du_{r-1}\,dv_{r-1} &= (\alpha_r c_r - \gamma_r a_r)\,u_r\,d\lambda\,d\mu, \end{aligned}$$

also

$$du\,dv = C\,u_1 u_2 \ldots u_r\,d\lambda\,d\mu, \tag{25}$$

wo C eine Konstante ist. Wie wir in Nr. 3 gesehen haben, können $u_1, u_2, \ldots, u_r$ als Faktoren, die für $\lambda = \mu = 0$ verschwinden, nur λ oder μ haben. λ ist, wie wir sahen, immer die zugeordnete Funktion einer

der Kurven $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$. Ferner ist $u_r = \lambda$. Und wenn eine der Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_{r-1}$ den Faktor μ hat, z. B. u_2, so haben diesen Faktor auch u_2, v_2, dann u_1, v_1 und also auch u, v, wie aus (10) folgt, d. h. es ist für $\mu = 0$ sowohl u wie v Null und auch μ ist in diesem Fall die zugeordnete Funktion einer der Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$. Daher ergibt sich aus (25), daß die Kurve $\mathfrak{B}$ die Form hat

(26) $$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1^{\beta_1} \mathfrak{B}_2^{\beta_2} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{\beta_\varrho}.$$

Wir bestimmen den Exponenten β_1. Nach (19), (20), (22) und (23) ist

$$u = g_0 \lambda^{\beta_1''} + g_1 \lambda^{\beta_1''+1} + \cdots, \qquad v = a_1 u^{\alpha_1} + \cdots + a_\nu u^{\alpha_\nu} + \cdots$$

$$\alpha_\nu = \frac{\beta_1'}{\beta_1''},$$

also

$$du\,dv = \frac{\partial(u,v)}{\partial(u,\mu)} \cdot \frac{\partial(u,\mu)}{\partial(\lambda,\mu)}\, d\lambda\, d\mu = \left\{\beta_1'' g_0 \lambda^{\beta_1''-1} + \cdots\right\}\left\{a_\nu \frac{d a_\nu}{d\mu} u^{\alpha_\nu} + \cdots\right\} d\lambda\, d\mu,$$

da a_ν der erste Koeffizient a_i ist, der von μ wirklich abhängt. Der Faktor von $d\lambda\, d\mu$ ist also genau teilbar durch

$$\lambda^{\beta_1''-1} u^{\alpha_\nu}$$

oder durch

$$\lambda^{\beta_1''-1+\beta_1'},$$

so daß $\beta_1 = \beta_1' + \beta_1'' - 1$. Wir haben also

(27) $$\beta_i = \beta_i' + \beta_i'' - 1, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varrho).$$

6. Zahl der Schnittpunkte zweier Divisoren oder zweier Kurven.

Es sei P ein Primteiler erster Art und $P(u, v)$ seine zugeordnete Funktion für eine Stelle S'. Es gehe P durch S', so daß $P(0, 0) = 0$. Wir können annehmen, daß in $P(u, v)$ das Glied v^m vorkommt, wenn m die Dimension der Glieder niedrigster Ordnung ist. Wir würden sonst statt u, v neue Hilfsgrößen durch eine passende homogene lineare Substitution einführen. Die Gleichung

$$P(u, v) = 0$$

ergibt für v eine oder mehrere Potenzreihen von u, die für $u = 0$ verschwinden. Eine sei

(28) $$v_1 = e_1 u^{r_1} + e_2 u^{r_2} + \cdots.$$

Sie schreite nach steigenden ganzen Potenzen von $u^{\frac{1}{\gamma_1}}$ fort. Diese Entwicklung definiert eine Stelle des Körpers P mit dem zugehörigen Primteiler. Die Stelle und der Primteiler heiße $\mathfrak{p}$. Zum Unterschied von den Primteilern des Körpers T heißen diese *Primteiler zweiter Stufe*. Ist

$Q(u, v)$ die zugeordnete Funktion irgendeines Divisors Q, der den Primteiler P nicht enthält, und ist $Q(u, v_1)$ genau durch die q-te Potenz von $u^{\frac{1}{\gamma_1}}$ teilbar, so sagen wir, Q wird an der Stelle $\mathfrak{p}$ von der q-ten Ordnung Null oder Q ist durch $\mathfrak{p}^q$ teilbar. Ist $\mathfrak{q}$ derjenige Divisor des Körpers P, der jeden Primteiler von P so oft enthält, wie er in Q enthalten ist, so sagen wir, Q geht für $P=0$ in $\mathfrak{q}$ über. Ist $Q' \sim Q$, also $R = Q/Q'$ eine Funktion aus T, und geht Q' für $P=0$ über in $\mathfrak{q}'$, so geht R für $P=0$ über in $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}'$, so daß $\mathfrak{q} \sim \mathfrak{q}'$. Daraus ergibt sich, daß die Divisoren einer Klasse von T in die Divisoren einer Klasse von P übergehen. Die Ordnung der Klasse $(\mathfrak{q})$, in die die Klasse (Q) für $P=0$ übergeht, bezeichnen wir mit

$$(P, Q)$$

und nennen sie die *Zahl der Schnittpunkte von P und Q*. Danach ist

$$(P, Q) = (P, Q'), \quad \text{wenn} \quad Q \sim Q'. \tag{29}$$

Hiernach ist (P, Q) auch definiert, wenn P in Q enthalten ist. Denn die Klasse (Q) enthält immer Divisoren Q', die zu P teilerfremd sind. Ist P kein Primteiler, sondern etwa

$$P = P_1^{p_1} P_2^{p_2} \ldots,$$

so definieren wir (P, Q) durch

$$(P, Q) = p_1(P_1, Q) + p_2(P_2, Q) + \cdots.$$

Ist

$$Q = Q_1^{q_1} Q_2^{q_2} \ldots,$$

so wird hiernach und nach der Definition von (P_i, Q)

$$(P, Q) = \sum p_k q_l (P_k, Q_l). \tag{30}$$

Schließlich ist noch

$$(P, Q) = (Q, P). \tag{31}$$

Um das zu beweisen, genügt es wegen (30) die Gleichung (31) für den Fall zu beweisen, wo P und Q (voneinander verschiedene) Primteiler sind. Es sei S' eine Stelle, durch die P und Q gehen. Wir bezeichnen den Beitrag dieser Stelle zu (P, Q) mit $(P, Q)_0$. Dann genügt es zu beweisen, daß

$$(P, Q)_0 = (Q, P)_0.$$

Es ergibt sich aber, daß das Produkt

$$\prod (v_k - v^{(l)}),$$

wo v_k alle Lösungen von $P(u, v) = 0$ und $v^{(l)}$ alle von $Q(u, v) = 0$ durchläuft, die für $u = 0$ verschwinden, genau durch die $(P, Q)_0$-te Potenz

von u teilbar ist, womit eine symmetrische Definition von $(P, Q)_0$ gewonnen ist. Außerdem sieht man ein, daß die Bezeichnung von (P, Q) als Zahl der Schnittpunkte von P und Q berechtigt ist.

Wir definieren noch einen Divisor des Primteilers oder Körpers P, der besonders wichtig ist. Es sei wieder S' eine Stelle von T, durch die P geht, und es sei wieder die Entwicklung v_1, die durch (28) gegeben ist, eine Lösung von $P(u, v) = 0$. Wir bilden einen Divisor $\mathfrak{d}_P$ des Körpers P, in den wir den durch v_1 definierten Primteiler $\mathfrak{p}$ so oft aufaufnehmen, wie er in

$$\frac{1}{du}\frac{\partial P}{\partial v} \tag{32}$$

enthalten ist. In derselben Weise soll für jeden Primteiler von P entschieden werden, ob und wie oft er in $\mathfrak{d}_P$ aufzunehmen ist. Da für $P(u, v) = 0$ auch $\frac{\partial P}{\partial u} du + \frac{\partial P}{\partial v} dv = 0$, so kann man statt (32) auch $\frac{1}{dv}\frac{\partial P}{\partial u}$ benutzen. Wir nennen $\mathfrak{d}_P$ den *Divisor der mehrfachen Stellen von P* und bezeichnen seine Ordnung mit $2\sigma_P$. Sie ist immer eine grade Zahl. Das ergibt sich in folgender Weise. Es sei $2\sigma_0$ der Beitrag der Stelle S' zu $2\sigma_P$. Es genügt zu zeigen, daß $2\sigma_0$ grade ist. Es seien ferner $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_r$ die Primteiler von P, die an der Stelle S' von T liegen. Die $\mathfrak{p}_i$ definierende Reihe sei v_{i1}. Sie schreite nach ganzen Potenzen von $u^{\frac{1}{\gamma_i}}$ fort. Wenn u den Punkt 0 in der Gaußschen u-Ebene einmal umläuft, gehe v_{i1} über in v_{i2}, v_{i2} in $v_{i3}, \ldots, v_{i\gamma_i}$ in v_{i1}.

Zunächst ist du teilbar durch

$$\mathfrak{p}_1^{\gamma_1-1}\,\mathfrak{p}_2^{\gamma_2-1}\ldots\mathfrak{p}_r^{\gamma_r-1}.$$

Es sei ferner $\frac{\partial P}{\partial v}$ teilbar durch die τ_i-te Potenz von $\mathfrak{p}_i$, so daß

$$2\sigma_0 = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_r - \{(\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1) + \cdots + (\gamma_r - 1)\}. \tag{33}$$

Dann ist

$$\frac{\partial P}{\partial v}(u, v_{i1}) = u^{\frac{\tau_i}{\gamma_i}} e_{i1}(u),$$

wo $e_{i1}(0) \neq 0$. Lassen wir u den Nullpunkt einmal umlaufen, so gehe e_{i1} über in e_{i2}, e_{i2} in $e_{i3}, \ldots, e_{i\gamma_i}$ in e_{i1}. Es ist dann auch $e_{i2}(0) \neq 0$, $e_{i3}(0) \neq 0, \ldots, e_{i\gamma_i}(0) \neq 0$, so daß

$$\frac{\partial P}{\partial v}(u, v_{ik}) = \omega_k u^{\frac{\tau_i}{\gamma_i}} e_{ik}(u),$$

wo ω_k eine γ_i-te Einheitswurzel ist, auch genau den Faktor $u^{\frac{\tau_i}{\gamma_i}}$ hat. Danach wird das Differenzenprodukt

$$D = \prod_{ik \neq lm} (v_{ik} - v_{lm}) = \sqrt{\prod \frac{\partial P}{\partial v}(u, v_{ik})} = u^{\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_r)} e(u),$$

wo $e(0) \neq 0$. Wir bezeichnen das Differenzenprodukt von $v_{k1}, v_{k2}, \ldots, v_{k\gamma_k}$ mit D_k und es sei

$$D_k = \prod_{l<m} (v_{kl} - v_{km}).$$

Ferner sei

$$D_0 = \prod_{i \neq l} (v_{ik} - v_{lm});$$

dann ist

$$D = D_0 D_1 D_2 \ldots D_r. \tag{34}$$

Wenn u einen Umlauf um den Punkt $u = 0$ macht, so geht v_{ik} in v_{ik+1}, $v_{i\gamma_i}$ in v_{i1} über, es bleibt also der erste Index ungeändert. Daher bleibt D_0 ungeändert, indem sich die Faktoren von D_0 nur vertauschen. In D_i $(i > 0)$ geht bei dem Umlauf von u auch i. a. jeder Faktor ohne Vorzeichenänderung in einen andern über, nur die $\gamma_i - 1$ Faktoren

$$v_{i1} - v_{i\gamma_i}, \quad v_{i2} - v_{i\gamma_i}, \ldots, v_{i\gamma_i - 1} - v_{i\gamma_i}$$

gehen mit Vorzeichenänderung in andere Faktoren von D_i über. Es nimmt daher D_i den Faktor $(-1)^{\gamma_i - 1}$ auf. Wegen (34) nimmt daher D bei dem Umlauf von u den Faktor

$$(-1)^{(\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1) + \cdots + (\gamma_r - 1)}$$

auf. Andrerseits nimmt aber D wegen (33) den Faktor

$$(-1)^{(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_r)}$$

auf, so daß

$$\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_r - \{(\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1) + \cdots + (\gamma_r - 1)\},$$

was nach (33) gleich $2\sigma_0$ ist, wie behauptet, eine grade Zahl ist.

Es sei übrigens bemerkt, daß $\mathfrak{d}_P$ sich geradeso definieren läßt, wenn P nicht Primteiler, sondern ein ganzer Divisor ist, der keinen Primteiler in höherer als der ersten Potenz enthält.

Unter den Klassen des Körpers P ist die kanonische Klasse besonders wichtig. Sie sei mit (k) bezeichnet. Es entsteht die Frage, welche Klasse von T für $P = 0$ in (k) übergeht. Es sei ξ eine Funktion aus T, die für $P = 0$ nicht konstant wird. Ist dann k der Divisor von P, der jeden Primteiler von P so oft enthält, wie er in $d\xi$ vorkommt, so gehört nach Definition k der kanonischen Klasse von P an. Nun wird, etwa an der Stelle S' für $P(u, v) = 0$

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial u} du + \frac{\partial \xi}{\partial v} dv = \frac{D(\xi, P)}{D(u, v)} \frac{du}{\frac{\partial P}{\partial v}}. \tag{35}$$

Es sei P_1 irgendein zu P äquivalenter Divisor und es werde

$$\frac{P}{P_1} = \eta$$

gesetzt. Es wird

$$\frac{D(\xi\eta)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial u}, & -\frac{P}{P_1^2}\frac{\partial P_1}{\partial u} + \frac{1}{P_1}\frac{\partial P}{\partial u} \\ \frac{\partial\xi}{\partial v}, & -\frac{P}{P_1^2}\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{1}{P_1}\frac{\partial P}{\partial v} \end{vmatrix},$$

also für $P = 0$

$$\frac{D(\xi\eta)}{D(uv)} = \frac{1}{P_1}\frac{D(\xi P)}{D(uv)}.$$

Daher folgt aus (35)

$$d\xi = P_1 \frac{D(\xi\eta)}{D(xy)}\frac{D(xy)}{D(uv)}\frac{du}{\frac{\partial P}{\partial v}}.$$

Es ist aber $\frac{D(\xi\eta)}{D(xy)}$ eine Funktion R des Körpers T, da ξ, η, x, y solche Funktionen sind. Es ist ferner nach Nr. 1 $\frac{D(xy)}{D(uv)}$ die zugeordnete Funktion $K(u, v)$ eines Divisors K der kanonischen Klasse von T. Daher wird für $P = 0$

$$d\xi = \left\{P_1\, R\, K \frac{du}{\frac{\partial P}{\partial v}}\right\}_{P=0},$$

wenn wir unter P_1, R, K die zugeordneten Funktionen der Divisoren P_1, R, K verstehen. Da R als Funktion aus T für $P = 0$ in die Hauptklasse (1) übergeht, so folgt, daß

(36) $$k = \mathfrak{d}_P^{-1}(P_1 K)_{P=0}.$$

Da $P_1 \sim P$, so haben wir:

Ist P ein Primteiler, $\mathfrak{d}_P$ der Divisor seiner mehrfachen Stellen und (K) die kanonische Klasse von T, so geht die Klasse (PK) für $P = 0$ über in die Klasse $(k\mathfrak{d}_P)$, wo (k) die kanonische Klasse von P ist.

Da die kanonische Klasse von P die Ordnung $2\pi_P - 2$ hat, wo π_P das Geschlecht von P ist, so folgt

(37) $$2\pi_P - 2 = (P, PK) - 2\sigma_P.$$

Ist das irreduzible Polynom $G(x, y)$, dessen Zähler P ist, in x, y vom Grade (l, m), so ist $P \sim L^l M^m$. Da nach (3) Nr. 1 $K \sim L^{-2} M^{-2}$, so ergibt sich wegen $(L, L) = (M, M) = 0$, $(L, M) = 1$ aus (37) die bekannte Formel

$$\pi_P = (l-1)(m-1) - \sigma_P.$$

Die in dieser Nr. angestellten Betrachtungen gelten genau ebenso für die Kurven. Ich hebe nur hervor: Ist $\mathfrak{P}$ eine Primkurve, $(\mathfrak{K})$ die kanonische Kurvenklasse, $\pi_{\mathfrak{P}}$ das Geschlecht und $2\sigma_{\mathfrak{P}}$ die Ordnung des Divisors der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{P}$, so ist

(38) $$2\pi_{\mathfrak{P}} - 2 = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}\mathfrak{K}) - 2\sigma_{\mathfrak{P}}.$$

Da die Kurven $\mathfrak{B}_i$ als zugeordnete Funktionen entweder 1, λ oder μ haben, so haben sie keine mehrfachen Stellen. Daher ist

$$2\pi(\mathfrak{B}_i) - 2 = (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i \mathfrak{K})$$

oder, da $\pi(\mathfrak{B}_i) = 0$,

$$(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i \mathfrak{K}) = -2. \tag{39}$$

7. Zusammenhang zwischen der Schnittpunktzahl zweier Divisoren und der zweier Kurven.

Es sei Q ein Divisor und es bedeute Q' die Kurve, in die der Divisor übergeht, wenn wir die ursprüngliche Definition der Stellen in der oben angegebenen Weise abändern. Es gibt immer einen zu Q äquivalenten Divisor Q_0, der nicht durch die Stelle S geht. Die Kurve Q_0', die aus dem Divisor Q_0 hervorgeht, kann dann keine Primkurve enthalten, die durch eine der aus S hervorgehenden Stellen ginge. Andrerseits gehen die Kurven $\mathfrak{B}_i$ nur durch solche Stellen. Daher ist $(\mathfrak{B}_i, Q_0') = 0$, also auch

$$(\mathfrak{B}_i, Q') = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varrho). \tag{40}$$

Es sei P ein Primteiler und $\mathfrak{P}$ die ihm entsprechende Primkurve. Da der algebraische Körper, der aus T für $P = 0$ hervorgeht, identisch ist mit dem, der für $\mathfrak{P} = 0$ entsteht, so geht die Klasse (Q) für $P = 0$ in dieselbe Klasse des Körpers P oder $\mathfrak{P}$ über, wie für $\mathfrak{P} = 0$, d. h. es ist

$$(P, Q) = (\mathfrak{P}, Q'). \tag{41}$$

Ist P kein Primteiler, sondern ist etwa

$$P = P_1^{p_1} P_2^{p_2} \ldots P_r^{p_r},$$

wo die P_i Primteiler sind, und ist $\mathfrak{P}_i$ die P_i entsprechende Primkurve, so ist nach dem eben bewiesenen

$$(P_i, Q) = (\mathfrak{P}_i, Q).$$

Da aber nach (30) der vorigen Nr.

$$(P, Q) = \sum p_k (P_k, Q), \qquad (\mathfrak{P}, Q) = \sum p_k (\mathfrak{P}_k, Q),$$

so folgt, daß (41) auch gilt, wenn P ein Divisor ist.

Ist P' die Kurve, die aus dem Divisor P hervorgeht, so besteht nach (17) Nr. 4 die Gleichung

$$P' = \mathfrak{P} s P. \tag{42}$$

Da sP nur Kurven $\mathfrak{B}_i$ enthält, so ist wegen (40)

$$(sP, Q') = 0. \tag{43}$$

Aus (41) und (43) folgt wegen (42) durch Addition

$$(P, Q) = (P', Q').$$

Es ist also die Zahl der Schnittpunkte zweier Divisoren gleich der Zahl der Schnittpunkte der aus ihnen hervorgehenden Kurven. **Daher ist die Unterscheidung zwischen P und P' und zwischen Q und Q' gar nicht notwendig.**

Sind P und Q zwei Divisoren und ist

(44) $$P = \mathfrak{P} s P, \qquad Q = \mathfrak{Q} s Q,$$

so wird

$$(P, Q) = (\mathfrak{P}, Q) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) + (\mathfrak{P}, sQ),$$
$$(P, sQ) = 0 = (\mathfrak{P}, sQ) + (sP, sQ),$$

woraus durch Subtraktion folgt

(45) $$(P, Q) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) - (sP, sQ)$$

oder auch

(46) $$\left(\frac{P}{sP}, \frac{Q}{sQ}\right) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}).$$

Es sei P ein Primteiler und $\mathfrak{P}$ die entsprechende Primkurve. Da die Körper P und $\mathfrak{P}$ identisch sind, so haben sie dasselbe Geschlecht. Also ist nach (37), (38), Nr. 6

$$(P, PK) - 2\sigma_P = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}\mathfrak{K}) - 2\sigma_{\mathfrak{P}}$$

oder wegen (24) Nr. 5 und (44)

$$(P, PK) - 2\sigma_P = \left(\frac{P}{sP}, \frac{P}{sP} K \mathfrak{B}\right) - 2\sigma_{\mathfrak{P}}$$

oder wegen (40)

$$(P, PK) - 2\sigma_P = (P, PK) + (sP, sP) - (sP, \mathfrak{B}) - 2\sigma_{\mathfrak{P}},$$

also

(47) $$2\sigma_P = 2\sigma_{\mathfrak{P}} - (sP, sP) + (sP, \mathfrak{B}).$$

Schließlich folgt noch aus (39) und (24) wegen (40)

$$-2 = (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i \mathfrak{K}) = (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i \mathfrak{B} K) = (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i \mathfrak{B}),$$

so daß

(48) $$(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i \mathfrak{B}) = -2.$$

8. Über die Zahlen $(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_l)$.

Wir setzen

(49) $$(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_l) = -b_{kl}.$$

Das System der b_{kl} bezeichnen wir kurz mit b, setzen also

(50) $$b = (b_{kl}).$$

Es ist b symmetrisch und ganzzahlig. Ferner ist

$$(51)\qquad b_{kl} \leqq 0 \quad \text{für} \quad k \neq l,$$

was aus der Definition von $(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_l)$ ja ohne weiteres erhellt. Die Eichfunktion von $\mathfrak{B}_k$ sei $\mathsf{B}_k(u, v; \tau_k)$. Es sei

$$(52)\qquad s\mathsf{B}_k = \mathfrak{B}_1^{a_{k1}} \mathfrak{B}_2^{a_{k2}} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{a_{k\varrho}}.$$

Die Zahl a_{kl} erhalten wir, indem wir die Lösung v_l von $\mathsf{B}_l(u, v; \tau_l') = 0$ in $\mathsf{B}_k(u, v; \tau_k'')$ einsetzen. Es wird dann B_k durch die a_{kl}-te Potenz von $u^{\frac{1}{\beta_l''}}$ teilbar. Es ist daher a_{kl} auch die Zahl der Schnittpunkte, die die Kurven (im üblichen Sinne) $\mathsf{B}_k(u, v; \tau_k'') = 0$ und $\mathsf{B}_l(u, v; \tau_l') = 0$ im Punkte $u = v = 0$ haben. Bezeichnen wir den Zähler der Funktion $\mathsf{B}_i(u, v; \tau_i)$, die ja als rationale Funktion von u, v dem Körper T angehört, mit $P_i(\tau_i)$, so ist a_{kl} auch die Zahl der Schnittpunkte der Primteiler $P_l(\tau_l')$ und $P_k(\tau_k'')$ an der Stelle S. Das gilt auch für $k = l$, wenn nur $\tau_k' \neq \tau_k''$. Es ist daher, wenn wir durch den Index 0 andeuten, daß nur der Beitrag der Stelle S zu einer Größe gemeint ist:

$$(53)\qquad a_{kl} = (P_k(\tau_k''), P_l(\tau_l'))_0.$$

Daraus ergibt sich

$$(54)\qquad a_{kl} = a_{lk}, \quad a_{kl} > 0.$$

Wir bezeichnen das quadratische System der a_{kl} mit a, setzen also

$$(55)\qquad (a_{kl}) = a.$$

Wir zeigen jetzt, daß die Systeme a und b zueinander reziprok sind, daß also

$$(56)\qquad ab = 1,$$

wenn wir das Einheitssystem kurz mit 1 bezeichnen. Ist $\mathfrak{P}_k(\tau_k)$ der Primteiler, der der Primkurve $P_k(\tau_k)$ entspricht, so haben wir wegen (52)

$$(57)\qquad P_k(\tau_k) = \mathfrak{B}_1^{a_{k1}} \mathfrak{B}_2^{a_{k2}} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{a_{k\varrho}} \mathfrak{P}_k(\tau_k).$$

Wir bezeichnen den Quotienten von $\mathsf{B}_k(\tau_k')$ und $\mathsf{B}_k(\tau_k'')$ mit R. Wegen (57) wird

$$(58)\qquad R = \frac{\mathsf{B}_k(\tau_k')}{\mathsf{B}_k(\tau_k'')} = \frac{P_k(\tau_k')}{P_k(\tau_k'')} = \frac{\mathfrak{P}_k(\tau_k')}{\mathfrak{P}_k(\tau_k'')}.$$

Es wird für $\mathfrak{B}_k = 0$, wie wir schon in Nr. 2 bemerkt haben,

$$\{R\}_{\mathfrak{B}_k = 0} = \frac{\tau_k - \tau_k'}{\tau_k - \tau_k''}.$$

Wegen (58) kann die Nullstelle τ_k' dieser Funktion nur von einem Schnittpunkte von $\mathfrak{P}_k(\tau_k')$ mit $\mathfrak{B}_k$ herrühren, so daß

$$(59) \qquad (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{P}_k) \geqq 1 .$$

Aus (53) und (57) folgt nach den Ergebnissen der vorigen Nummer

$$(60) \qquad \begin{aligned} a_{kl} &= (\mathfrak{P}_k(\tau_k'), P_l(\tau_l''))_0 \\ &= a_{l1}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{P}_k) + \cdots + a_{l\varrho}(\mathfrak{B}_\varrho, \mathfrak{P}_k) + (\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_l)_0 . \end{aligned}$$

Denn bei den Größen $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{P}_k)$ können wir den Index 0 fortlassen, da die $\mathfrak{B}_i$ nur durch Stellen gehen, die aus S hervorgehen. Da alle $a_{\alpha\beta} > 0$ und nach (59) $(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{P}_k) > 0$, alle anderen Größen in (60) aber nicht negativ sind, so ergibt sich

$$(61) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{B}_l, \mathfrak{P}_k) = 0 \text{ für } k \neq l \\ \qquad\qquad\; = 1 \text{ für } k = l , \end{cases}$$

$$(62) \qquad (\mathfrak{P}_k(\tau_k'), \mathfrak{P}_l(\tau_l''))_0 = 0 .$$

Aus (57) folgt jetzt, da nach (40) der vorigen Nummer $(\mathfrak{B}_l, P_k) = 0$, in Verbindung mit (61)

$$(63) \qquad \begin{aligned} a_{k1} b_{1l} + a_{k2} b_{2l} + \cdots + a_{k\varrho} b_{\varrho l} &= 0 \text{ für } k \neq l \\ &= 1 \text{ für } k = l \end{aligned}$$

oder es ist, wie behauptet, $ab = 1$. Da a und b ganzzahlig sind, so sind die Determinanten $|a|$ und $|b|$ beide 1 oder beide -1. Wie wir weiter unten sehen werden, ist $|a| = |b| = 1$.

Da in (63) die a_{kl} positiv, die b_{kl} für $k \neq l$ negativ oder Null sind, so ergibt sich

$$(64) \qquad -b_{kk} = (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_k) < 0 .$$

Wir betrachten die Funktion

$$H_k(\xi) = \frac{\mathsf{B}_k(u, v; \tau_k')}{\mathsf{B}_k(u, v; \tau_k'')} - \xi ,$$

wo ξ ein Parameter sein soll. Wir bezeichnen den Zähler von $H_k(\xi)$, also den von $\mathsf{B}_k(u, v; \tau_k') - \xi \mathsf{B}_k(u, v; \tau_k'')$, mit $Q_k(\xi)$. Es ist Q_k mindestens durch dieselbe Potenz von $\mathfrak{B}_i$ teilbar wie B_k oder P_k. Wir setzen

$$(65) \qquad Q_k(\xi) = \mathfrak{B}_1^{a_{k1}} \mathfrak{B}_2^{a_{k2}} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{a_{k\varrho}} \mathfrak{Q}_k(\xi) .$$

Es ist dann $\mathfrak{Q}_k$ eine ganze Kurve. Es wird

$$(66) \qquad H_k(\xi) = \frac{\mathsf{B}_k(\tau_k')}{\mathsf{B}_k(\tau_k'')} - \xi = \frac{P_k(\tau_k')}{P_k(\tau_k'')} - \xi = \frac{\mathfrak{Q}_k(\xi)}{\mathfrak{P}_k(\tau_k'')} .$$

Für $\mathfrak{B}_k = 0$ wird

$$(67) \qquad \{H_k(\xi)\}_{\mathfrak{B}_k=0} = \frac{\tau_k - \tau_k'}{\tau_k - \tau_k''} - \xi$$

und für $\mathfrak{B}_l = 0$ wird

$$(68) \qquad \{H_k(\xi)\}_{\mathfrak{B}_l=0} = \xi_{kl} - \xi \qquad (k \neq l),$$

wo ξ_{kl} eine Konstante ist. Dies ergibt sich so: Wenn ξ_{kl} nicht konstant wäre, so würde es eine rationale Funktion von τ_l sein. Eine Nullstelle dieser Funktion müßte eine Schnittstelle von $\mathfrak{B}_l$ und $\mathfrak{P}_k(\tau_k')$ sein. Aber nach (61) ist $(\mathfrak{B}_l, \mathfrak{P}_k) = 0$ für $k \neq l$.

Aus (67) geht hervor, daß $\mathfrak{Q}_k(\xi)$ für keinen Wert von ξ identisch Null werden kann, wenn $\mathfrak{B}_k = 0$ gesetzt wird, d. h. es kann $\mathfrak{Q}_k(\xi)$ nicht durch $\mathfrak{B}_k$ teilbar sein. Dagegen ist nach (68) sicher $\mathfrak{Q}_k(\xi_{kl})$ durch $\mathfrak{B}_l$ teilbar. Wir setzen

$$(69) \qquad \mathfrak{Q}_k(\xi_{kl}) = \mathfrak{B}_1^{\alpha_1} \mathfrak{B}_2^{\alpha_2} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{\alpha_\varrho} \mathfrak{Q}_{kl}.$$

Hier ist nach dem eben Gesagten

$$(70) \qquad \alpha_k = 0, \qquad \alpha_l > 0, \qquad \alpha_i \geqq 0 \qquad (\text{für } i \neq k, l).$$

Nach (66) und (69) ist

$$(71) \qquad \mathfrak{B}_1^{\alpha_1} \mathfrak{B}_2^{\alpha_2} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{\alpha_\varrho} \mathfrak{Q}_{kl} \sim \mathfrak{P}_k.$$

Hieraus folgt wegen (61)

$$(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_1^{\alpha_1} \mathfrak{B}_2^{\alpha_2} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{\alpha_\varrho} \mathfrak{Q}_{kl}) = (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{P}_k) = 1$$

oder

$$(72) \qquad \alpha_1 b_{k1} + \alpha_2 b_{k2} + \cdots + \alpha_\varrho b_{k\varrho} - (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{Q}_{kl}) = -1.$$

Auf der linken Seite fehlt wegen $\alpha_k = 0$ die Größe b_{kk}. Die anderen b_{ki} sind kleiner oder gleich Null. Sie können nicht alle Null sein. Denn dann würde aus (63) folgen

$$a_{kl} b_{kk} = 0 \qquad (k \neq l),$$

was nicht geht, da nach (54), (64) $a_{kl} > 0$, $b_{kk} > 0$. Es sei die Bezeichnung so gewählt, daß $b_{kl} \neq 0$, also $b_{kl} < 0$ ist. Dann folgt aus (72) wegen (70) und da $(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{Q}_{kl}) \geqq 0$

$$(73) \qquad \begin{cases} 1.\ \alpha_l = 1, \quad b_{kl} = -1; \\ 2.\ \text{wenn } i \text{ von } k \text{ und } l \text{ verschieden ist, so ist } \alpha_i = 0, \text{ wenn } b_{ki} \neq 0, \\ \quad \text{und } b_{ki} = 0, \text{ wenn } \alpha_i \neq 0. \end{cases}$$

Wir haben also das Ergebnis, daß

$$(74) \qquad (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_l) = 0 \text{ oder } 1 \quad \text{für } k \neq l.$$

Es sei jetzt die Bezeichnung so gewählt, daß

(75) $$b_{12} = b_{13} = \ldots = b_{1\lambda} = -1, \quad b_{1\lambda+1} = \ldots = b_{1\varrho} = 0.$$

Wir wählen $k = 1$, $l = 2$ und haben wegen (71), (73)

$$\mathfrak{Q}_1(\xi_{12}) = \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_{\lambda+1}^{e_{\lambda+1}} \mathfrak{B}_{\lambda+2}^{e_{\lambda+2}} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{e_\varrho} \mathfrak{Q}_{12} \sim \mathfrak{P}_1,$$

also unter Beachtung von (61)

$$(\mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_{\lambda+1}^{e_{\lambda+1}} \mathfrak{B}_{\lambda+2}^{e_{\lambda+2}} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{e_\varrho} \mathfrak{Q}_{12}) = (\mathfrak{B}_3, \mathfrak{P}_1) = 0$$

oder

$$b_{23} + e_{\lambda+1} b_{3\lambda+1} + e_{\lambda+2} b_{3\lambda+2} + \cdots + e_\varrho b_{3\varrho} - (\mathfrak{B}_3, \mathfrak{Q}_{12}) = 0.$$

Auf der linken Seite kann kein Summand positiv sein. Daher ist unter anderem $b_{23} = 0$. Machen wir uns von der speziellen Bezeichnung frei, so haben wir:

Treffen zwei der Kurven $\mathfrak{B}_i$ dieselbe dritte, so treffen sie einander nicht.

Wir können daher die $\mathfrak{B}_i$ in folgender Weise anordnen. Wir wählen $\mathfrak{B}_1$ beliebig und bezeichnen in irgendeiner Reihenfolge diejenigen Kurven $\mathfrak{B}_i$, die $\mathfrak{B}_1$ schneiden, mit $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \ldots, \mathfrak{B}_\lambda$. Dann lassen wir irgendein $\mathfrak{B}_i$ folgen als $\mathfrak{B}_{\lambda+1}$ und darauf die Kurven $\mathfrak{B}_i$, die $\mathfrak{B}_{\lambda+1}$ treffen. Fahren wir in dieser Weise fort, so finden wir:

Die Größen b_{kl} lassen sich so ordnen, daß in jeder Vertikalreihe oberhalb der Diagonale einmal -1 steht und sonst Nullen.

Über die positiven Größen b_{kk} können wir aussagen, daß mindestens eine von ihnen gleich 1 ist. Nach (48) Nr. 7 ist nämlich

(76) $$\beta_1 b_{1k} + \beta_2 b_{2k} + \cdots + \beta_\varrho b_{\varrho k} = 2 - b_{kk}.$$

Wir setzen

(77) $$2 - b_{kk} = c_k.$$

Ferner bezeichnen wir mit β und c diejenigen Systeme, die aus der einen Horizontalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varrho$ und $c_1, c_2, \ldots, c_\varrho$ bestehen. Dann können wir (76) in der Form schreiben:

(78) $$\beta b = c,$$

woraus folgt, da $ab = ba = 1$,

(79) $$\beta = ca.$$

Da die a_{kl} alle positiv sind und die β_i auch, so können hiernach nicht alle c negativ oder Null sein. Also ist für mindestens ein k

$$c_k = 2 - b_{kk} > 0,$$

also $b_{kk} < 2$. Aber es ist andererseits $b_{kk} > 0$, so daß, wie behauptet, mindestens ein b_{kk} gleich 1 ist.

9. Über die Kurven $\mathfrak{B}_i$.

Die Substitution oder genauer die Substitutionen, durch die wir die Stelle S aufgelöst haben, wird, wie wir in Nr. 3 gesehen haben, schrittweise aus einfachen quadratischen Transformationen aufgebaut. Wir wollen annehmen, daß wir diesen Aufbau erst zum Teil vollzogen haben, und sehen, welche Änderung eintritt, wenn wir einen Schritt weitergehen und eine der neuen Stellen, etwa eine Stelle $(r-1)$-ter Ordnung, durch eine quadratische Transformation in unendlich viele Stellen r-ter Ordnung verwandeln. Durch die schon ausgeführten Transformationen seien die $(k-1)$ Primteiler zweiter Art

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{k-1}$$

in Kurven verwandelt.

Es sei S' die Stelle $(r-1)$-ter Ordnung, die wir in unendlich viele Stellen r-ter Ordnung verwandeln wollen. Sie sei definiert durch die $(r-1)$ ersten Gleichungspaare (10) Nr. 3. Wir setzen $u_{r-1} = \lambda'$, $v_{r-1} = \mu'$, und es werde

$$u = \lambda'^{\gamma_1} \mu'^{\delta_1} f_1(\lambda', \mu'), \qquad v = \lambda'^{\gamma_2} \mu'^{\delta_2} f_2(\lambda', \mu'). \tag{80}$$

Es sind also λ', μ' die Hilfsgrößen, durch die wir die Funktionen aus T in der Umgebung von S' darstellen. Nach den Ergebnissen von Nr. 3 ist $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $f_1(0,0) \neq 0$, $f_2(0,0) \neq 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1. Es sei $\delta_1 \delta_2 = 0$, etwa $\delta_1 \geqq 0$, $\delta_2 = 0$.

Fall 2. Es sei $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$.

Im Falle 1 geht durch S' eine Kurve $\mathfrak{B}_i$, nämlich die, deren zugeordnete Funktion λ' ist. Sie sei bezeichnet mit $\mathfrak{B}_{k-1}$.

Im Falle 2 gehen durch S' zwei der Kurven $\mathfrak{B}_i$, die durch $\lambda' = 0$ und durch $\mu' = 0$ definiert sind. Sie mögen $\mathfrak{B}_{k-1}$ und $\mathfrak{B}_{k-2}$ genannt werden.

Da sie sich in S' treffen, so ist $(\mathfrak{B}_{k-1}, \mathfrak{B}_{k-2}) = 1$.

Wir wollen jetzt die Stelle S' in unendlich viele Stellen r-ter Ordnung verwandeln durch die Transformationen

$$\text{I. } \lambda' = (a_r v_r + b_r) u_r, \qquad \mu' = (c_r v_r + d_r) u_r,$$
$$\text{II. } \lambda' = (a_r + b_r v^{(r)}) u^{(r)}, \qquad \mu' = (c_r + d_r v^{(r)}) u^{(r)}.$$

Die Substitution I soll gelten für $|v_r| < R$, und II für $|v^{(r)}| \leqq \frac{1}{R}$, wo R eine positive Größe ist. Nach den Betrachtungen im Anfang von Nr. 3

erhalten wir auf die Art die ganze Umgebung von S'. Die Stellen r-ter Ordnung, die aus S' auf diese Art hervorgehen, sind charakterisiert durch den Wert, den v_r oder $v^{(r)}$ dort annimmt. Wir wollen II nur verwenden für die Umgebung von $v^{(r)} = 0$. Das können wir immer, da wir ja R beliebig groß wählen dürfen. Wir setzen also in II einfach $u^{(r)} = \lambda$, $v^{(r)} = \mu$ und haben

$$(81) \qquad \lambda' = (a_r + b_r\mu)\lambda, \qquad \mu' = (c_r + d_r\mu)\lambda.$$

Es sei jetzt S_0 irgendeine Stelle, die von der hierdurch definierten Stelle r-ter Ordnung verschieden ist, und es habe dort v_r den Wert l_0. Dann setzen wir $u_r = \lambda$, $v_r = l_0 + \mu$ und haben

$$(82) \qquad \lambda' = \{(a_r l_0 + b_r) + a_r\mu\}\lambda, \qquad \mu' = \{(c_r l_0 + d_r) + c_r\mu\}\lambda.$$

Uns interessiert besonders die Stelle r-ter Ordnung, wo $a_r l_0 + b_r = 0$, und die, wo $c_r l_0 + d_r = 0$. Diese seien bezeichnet mit S_1 und S_2. Sie sind voneinander verschieden, da die Substitutionsdeterminante $a_r d_r - b_r c_r$ nicht Null sein darf. Zu S_1 führt in leicht ersichtlicher Wahl der Bezeichnung die Substitution

$$(83) \qquad \lambda' = \lambda\mu, \qquad \mu' = (m_1 + k_1\mu)\lambda \qquad (m_1 \neq 0)$$

und zu S_2 die Substitution

$$(84) \qquad \lambda' = (m_2 + k_2\mu)\lambda, \qquad \mu' = \lambda\mu \qquad (m_2 \neq 0).$$

Aus (80), (83), (84) folgt für die Umgebung von S_1

$$(85) \quad u = \lambda^{\gamma_1+\delta_1}\mu^{\gamma_1}(m_1 + k_1\mu)^{\delta_1} f_1, \qquad v = \lambda^{\gamma_2+\delta_2}\mu^{\gamma_2}(m_1 + k_1\mu)^{\delta_2} f_2$$

und für die Umgebung von S_2

$$(86) \quad u = \lambda^{\gamma_1+\delta_1}\mu^{\delta_1}(m_2 + k_2\mu)^{\gamma_1} f_1, \qquad v = \lambda^{\gamma_2+\delta_2}\mu^{\delta_2}(m_2 + k_2\mu)^{\gamma_2} f_2.$$

Zunächst wird durch $\lambda = 0$ eine Primkurve definiert. Diese geht durch alle Stellen r-ter Ordnung, da ja u und v immer durch λ teilbar sind und immer für $\lambda = 0$ der Quotient λ'/μ' veränderlich bleibt. Aus dem letzten Umstande folgt, daß die für die verschiedenen Stellen durch $\lambda = 0$ definierte Primkurve immer dieselbe ist. Diese Primkurve ist neu, da λ' und μ' beide durch sie teilbar sind, sie also in bezug auf λ', μ' von der zweiten Art ist. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{B}_k$. Wir sagen von ihr, sie gehört zu der Stelle $(r-1)$-ter Ordnung S', durch deren Auflösen sie entsteht. Für das Weitere müssen wir die oben angegebenen beiden Fälle unterscheiden.

1. **Fall.** Es sei $\delta_2 = 0$, $\delta_1 \geqq 0$. Da immer $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, so wird für die Umgebung von S_1 durch $\mu = 0$ eine Primkurve definiert. Da aber nach (83) für $\mu = 0$ λ' verschwindet, nicht dagegen μ', so ist diese Prim-

kurve nichts anderes als $\mathfrak{B}_{k-1}$. Man sieht, daß diese Kurve von den Stellen r-ter Ordnung nur die Stelle S_1 trifft. Das folgt aber auch schon daraus, daß $\mathfrak{B}_k$ durch alle hier definierten Stellen r-ter Ordnung geht. Ginge also $\mathfrak{B}_{k-1}$ außer durch S_1 noch durch eine andere dieser Stellen, so wäre $(\mathfrak{B}_{k-1}, \mathfrak{B}_k) > 1$, was ja unmöglich ist. Durch die Stelle S_2 geht im Falle 1 außer $\mathfrak{B}_k$ keine Primkurve $\mathfrak{B}_i$. Es geht überhaupt durch alle hier betrachteten Stellen r-ter Ordnung außer durch S_1 nur $\mathfrak{B}_k$. Das kommt daher, daß der Faktor von λ in dem Ausdruck für λ' in (82) nur für die Stelle S_1 verschwindet. Da andererseits $\mathfrak{B}_k$ durch keine anderen Stellen geht als durch die aus S' hervorgegangenen, so ist $(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_i) = 0$, wenn $i \neq k - 1$.

Für die zu den vorhandenen Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{k-1}$ neu hinzukommende Kurve $\mathfrak{B}_k$ gilt also bei passender Wahl der Bezeichnung im Falle 1

$$(87) \qquad (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_{k-1}) = 1, \quad (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_i) = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k - 1.$$

2. **Fall.** In diesem Falle geht durch S_1 außer $\mathfrak{B}_k$ die Kurve $\mathfrak{B}_{k-2}$. Ihre zugeordnete Funktion ist μ. Denn für $\mu = 0$ wird nach (83) $\lambda' = 0$, während μ' veränderlich bleibt. Durch S_2 geht außer $\mathfrak{B}_k$ die Kurve $\mathfrak{B}_{k-1}$, deren zugeordnete Funktion μ ist. Es wird nämlich, jetzt nach (84), $\mu' = 0$ für $\mu = 0$, während λ' veränderlich bleibt. Da wieder $\mathfrak{B}_k$ durch alle hier betrachteten Stellen r-ter Ordnung geht, so können $\mathfrak{B}_{k-1}$ und $\mathfrak{B}_{k-2}$ durch keine dieser Stellen gehen außer $\mathfrak{B}_{k-1}$ durch S_2 und $\mathfrak{B}_{k-2}$ durch S_1. Es wird also im Falle 2

$$(88) \qquad (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_{k-1}) = 1, \quad (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_{k-2}) = 1, \quad (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_i) = 0,$$
$$\text{wenn } i \neq k - 1,\ k - 2.$$

Das letzte folgt genau wie im Falle 1. Außerdem ergibt sich, daß jetzt $(\mathfrak{B}_{k-1}, \mathfrak{B}_{k-2}) = 0$ in Bestätigung des Satzes, daß zwei der Kurven $\mathfrak{B}_i$, die beide dieselbe dritte schneiden, sich nicht treffen. *Es bleiben also durch die Transformation die Schnittpunktzahlen* $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_l)$ *nicht ungeändert.*

Wenn wir erst einen Teil der quadratischen Transformationen ausgeführt haben, mit denen wir die Stelle S auflösen wollen, und etwa l Primteiler zweiter Art, $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_l$, in Kurven verwandelt sind, so wollen wir setzen

$$(89) \qquad (\mathfrak{B}_m, \mathfrak{B}_i) = -b_{mi}^{(\varrho-l)},$$

so daß $b_{mi}^{(0)}$ mit dem oben definierten b_{mi} identisch ist. Das quadratische System der $b_{mi}^{(\varrho-l)}$ das mit $b^{(\varrho-l)}$ bezeichnet sei, besteht nur aus l^2 Größen. Da für die l Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_l$ genau dasselbe gelten muß wie für die

ϱ Kurven $\mathfrak{B}_i$, so ist die Determinante von $b^{(\varrho-l)}$ gleich 1. Das reziproke System von $b^{(\varrho-l)}$ sei mit $a^{(\varrho-l)}$ bezeichnet. Es ist dann nach dem in der vorigen Nummer Bewiesenen $a_{mi}^{(\varrho-l)}$ gleich der Potenz von $\mathfrak{B}_m$, die in $\mathsf{B}_i(u, v; \tau_i')$ enthalten ist. Diese Zahl ist aber allein abhängig von den Eichfunktionen B_m und B_i. Man erhält daher das System $a^{(\varrho-l)}$ aus dem System a, indem man die letzten $\varrho - l$ Zeilen und Spalten fortstreicht. Mit anderen Worten, es ist

$$(90) \qquad a_{mi}^{(\varrho-l)} = a_{mi} \qquad (m, i = 1, 2, \ldots l).$$

Die Determinanten der Systeme $a^{(\varrho-l)}$ sind auch alle gleich 1.

Da die Systeme $a^{(\varrho-l)}$ und $b^{(\varrho-l)}$ reziprok zueinander sind und ihre Determinanten gleich 1, so ist $b_{ll}^{(\varrho-l)}$ gleich der Unterdeterminante des Elementes $a_{ll}^{(\varrho-l)}$ im Systeme $a^{(\varrho-l)}$, also gleich der Determinante von $a^{(\varrho-l+1)}$, d. h. gleich 1. Wir haben also:

Sind die Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$ in der Reihenfolge geordnet, wie sie entstehen, so ist

$$(91) \qquad b_{ll}^{(\varrho-l)} = 1.$$

Es sei jetzt A ein ganzer Divisor erster Art, der durch S geht, und es sei

$$(92) \qquad sA = \mathfrak{B}_1^{q_1} \mathfrak{B}_2^{q_2} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{q_\varrho}.$$

Wir betrachten A in der Umgebung der Stelle S', zu der wir durch die Substitution (80) kommen. Es wird für die Umgebung von S'

$$(93) \qquad A = \mathfrak{B}_1^{q_1} \mathfrak{B}_2^{q_2} \ldots \mathfrak{B}_{k-1}^{q_{k-1}} \mathfrak{A}^{(\varrho-k)},$$

wo $\mathfrak{B}_i$ die zugeordnete Funktion der Kurve $\mathfrak{B}_i$ sein soll und wo $\mathfrak{A}^{(\varrho-k)}$ die zugeordnete Funktion einer ganzen Kurve $\mathfrak{A}^{(\varrho-k)}$ ist, die keine der Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{k-1}$ als Faktor enthält. Die Kurven $\mathfrak{B}_k, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$ fehlen natürlich in (93), da sie ja noch Primteiler zweiter Art sind und erst bei weiterer Auflösung der Stelle S zu Kurven werden. Es seien in $\mathfrak{A}^{(\varrho-k)}$, das eine ganze rationale Funktion von λ', μ' ist, die Glieder niedrigster Dimension von der $s^{(k)}$-ten Dimension. Die Kurve $\mathfrak{A}^{(\varrho-k)} = 0$ habe also im Punkte $\lambda' = \mu' = 0$ einen $s^{(k)}$-fachen Punkt. Wir unterscheiden die beiden Fälle wie oben:

Fall 1. Es ist $\mathfrak{B}_{k-1} = \lambda'$, $\mathfrak{B}_i = 1$ für $i = 1, 2, \ldots, k-2$. Führen wir daher die Substitution (82) in (93) aus, so wird A durch die $(q_{k-1} + s^{(k)})$-te Potenz von λ teilbar. Da aber λ nach der Transformation die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{B}_k$ ist, so enthält A die Kurve $\mathfrak{B}_k$ in der Potenz $(q_{k-1} + s^{(k)})$, d. h. es ist $q_k = q_{k-1} + s^{(k)}$ oder

$$(94) \qquad s^{(k)} = q_k - q_{k-1}.$$

Wegen der im Falle 1 geltenden Gleichungen (87) und wegen (91) können wir diese Gleichung unter Benutzung der Bezeichnung (89) auch schreiben

$$(95)\qquad s^{(k)} = b_{k1}^{(\varrho-k)} q_1 + b_{k2}^{(\varrho-k)} q_2 + \cdots + b_{k,k-1}^{(\varrho-k)} q_{k-1} + b_{kk}^{(\varrho-k)} q_k .$$

Fall 2. Es ist jetzt $\mathfrak{B}_{k-1} = \lambda'$, $\mathfrak{B}_{k-2} = \mu'$. Statt (94) erhalten wir daher

$$s^{(k)} = q_k - q_{k-1} - q_{k-2} .$$

Da jetzt die Gleichungen (88) gelten, so folgt wiederum die Gleichung (95).

Wir geben noch an, wie man die Stellen der Kurve $\mathfrak{B}_l$ bestimmen kann, wo sie die anderen Kurven $\mathfrak{B}_i$ trifft oder irgendeine Primkurve $\mathfrak{P}$.

Wir setzen

$$(96)\qquad B_i = \mathsf{B}_1^{b_{i1}}(\tau_1')\,\mathsf{B}_2^{b_{i2}}(\tau_2') \ldots \mathsf{B}_\varrho^{b_{i\varrho}}(\tau_\varrho');$$

es ist B_i genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{B}_i$ teilbar und enthält keine der anderen $\mathfrak{B}_k$. Es ist

$$(97)\qquad \begin{cases} \{B_i\}_{\mathfrak{B}_l=0} = \text{konst}, \text{ wenn } (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_l) = 0, \\ \phantom{\{B_i\}_{\mathfrak{B}_l=0}} = \dfrac{g_{il}(\tau_l)}{\tau_l - \tau_l'}, \text{ wenn } (\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_l) = 1. \end{cases}$$

Hier ist g_{il} eine lineare Funktion von τ_l, die auch konstant sein kann. Die Nullstelle von $g_{il}/(\tau_l - \tau_l')$ gibt die Stelle von $\mathfrak{B}_l$, wo $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B}_l$ einander treffen.

Es sei jetzt P ein Primteiler und $\mathfrak{P}$ die ihm entsprechende Kurve. Es sei

$$sP = \mathfrak{B}_1^{p_1}\mathfrak{B}_2^{p_2} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{p_\varrho}$$

und

$$(r_1, r_2, \ldots, r_\varrho) = (p_1, p_2, \ldots, p_\varrho)\,b .$$

Dann setzen wir

$$(98)\qquad B_P = \mathsf{B}_1^{r_1}(\tau_1')\,\mathsf{B}_2^{r_2}(\tau_2') \ldots \mathsf{B}_\varrho^{r_\varrho}(\tau_\varrho'),$$

so daß B_P die Kurven $\mathfrak{B}_i$ in derselben Potenz enthält wie P. Es wird

$$(99)\qquad \left\{\frac{P}{B_P}\right\}_{\mathfrak{B}_l=0} = \frac{g_l(\tau_l)}{(\tau_l - \tau_l')^{r_l}},$$

wo g_l eine ganze rationale Funktion von τ_l höchstens vom Grade r_l ist. Die r_l Nullstellen der in (99) rechts stehenden Funktion geben die Stellen von $\mathfrak{B}_l$, wo $\mathfrak{B}_l$ die Kurve $\mathfrak{P}$ trifft.

10. Die Transformation von a und b in Einheitssysteme.

Die ϱ Kurven $\mathfrak{B}_i$ denken wir uns so geordnet, daß $b_{\varrho\varrho} = 1$ ist. Es sei dann g_1 das System von ϱ^2 Elementen, das aus dem Einheitssystem dadurch hervorgeht, daß in der letzten Kolonne an denjenigen Stellen die Nullen durch eine 1 ersetzt werden, wo in b die Zahl -1 steht. h_1 sei das zu g_1 reziproke System. Es entsteht aus g_1, indem man die Einsen außerhalb der Diagonale durch -1 ersetzt. Es stimmt also die ϱ-te Spalte von h_1 mit der von b überein, während im übrigen h_1 das Einheitssystem ist.

Wir setzen

$$(100) \qquad g_1 b \bar{g}_1 = b^{(1)}, \qquad \bar{h}_1 a h_1 = a^{(1)},$$

wo durch Überstreichen eines Systems wie üblich ausgedrückt wird, daß Horizontalreihen und Vertikalreihen zu vertauschen sind. Es ist h_1 reziprok zu g_1, also auch $\bar{h}_1$ zu $\bar{g}_1$ und daher

$$(101) \qquad a^{(1)} b^{(1)} = 1.$$

Zufolge der Wahl von g_1 enthält $b^{(1)}$ in der letzten Zeile und letzten Kolonne nur Nullen bis auf das Diagonalglied, das 1 ist. Dasselbe gilt von $a^{(1)}$, da $a^{(1)}$ reziprok zu $b^{(1)}$ ist. Infolge der Wahl von h_1 unterscheidet sich $a^{(1)}$ von a nur in den Elementen der letzten Zeile und letzten Kolonne. Lassen wir also in $a^{(1)}$ die letzte Zeile und Kolonne fort, so bedeuten in dem entstehenden System von $(\varrho - 1)^2$ Elementen die Elemente nach wie vor die Zahlen der Schnittpunkte der Kurven $\mathsf{B}_k(u, v; \tau_k') = 0$ und $\mathsf{B}_l(u, v; \tau_l'') = 0$ im Punkte $u = v = 0$. Nur fehlt jetzt B_ϱ. Es steht also das System $a^{(1)}$ zu den $\varrho - 1$ Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{\varrho-1}$ in derselben Beziehung wie das ursprüngliche System a zu den ϱ Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_\varrho$. Das entsprechende gilt dann auch von $b^{(1)}$, das als reziprokes System von $a^{(1)}$ eindeutig bestimmt ist. Nach den Ergebnissen von Nr. 9 kommt also der Übergang von a und b zu $a^{(1)}$ und $b^{(1)}$ darauf hinaus, daß wir von den quadratischen Transformationen, die die Stelle S auflösen, diejenigen fortlassen, die den Primteiler $\mathfrak{B}_\varrho$ zweiter Art in eine Kurve verwandeln. Die übrigbleibenden Transformationen liefern dann nur noch die Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{\varrho-1}$. Dies Verfahren können wir fortsetzen. Es besteht also darin, daß wir die angewandten Transformationen, die aus quadratischen zusammengesetzt sind, wieder rückwärts abbauen. Dies geschieht in folgender Weise.

Da $b^{(1)}$, nach Fortlassung der letzten Zeile und Spalte, zu den $\varrho - 1$ Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{\varrho-1}$ in derselben Beziehung steht wie b zu den ϱ Kurven $\mathfrak{B}_i$, so hat auch $b^{(1)}$ die wesentlichen Eigenschaften von b. Es

stehen also in $b^{(1)}$ außerhalb der Diagonale nur Nullen oder -1 und in der Diagonale positive ganze Zahlen, und zwar ist von den $(\varrho-1)$ ersten Elementen der Diagonale mindestens eins gleich 1. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß

$$b^{(1)}_{\varrho-1,\varrho-1}=1$$

ist. Unter g_2 verstehen wir das System von ϱ^2 Elementen, das aus dem Einheitssystem dadurch hervorgeht, daß in der vorletzten Vertikalreihe dort die Nullen durch 1 ersetzt werden, wo in $b^{(1)}$ die Zahl -1 steht. Es sei h_2 das zu g_2 reziproke System. Es entsteht aus g_2, indem man überall $+1$ statt -1 schreibt. Wir setzen

$$g_2 b^{(1)} \bar{g}_2 = b^{(2)}, \qquad \bar{h}_2 a^{(1)} h_2 = a^{(2)}, \tag{102}$$

so daß

$$a^{(2)} b^{(2)} = 1. \tag{103}$$

Infolge der Wahl des Systems g_2 sind in $b^{(2)}$ die Elemente der beiden letzten Spalten und Zeilen die des Einheitssystems. Da $a^{(2)}$ das reziproke zu $b^{(2)}$ ist, so gilt für $a^{(2)}$ dasselbe. Die übrigen $(\varrho-2)^2$ Elemente von $a^{(2)}$ stimmen wieder mit denen von a überein. Es stehen die Systeme von $(\varrho-2)^2$ Elementen, die aus $a^{(2)}$ und $b^{(2)}$ hervorgehen, zu den Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{\varrho-2}$ in derselben Beziehung, wie die Systeme a, b zu den ϱ Kurven $\mathfrak{B}_i$. Und die Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{\varrho-2}$ entstehen wieder dadurch, daß die Stelle S durch eine Reihe von quadratischen Funktionen aufgelöst wird. Es steht also auch in $b^{(2)}$ außerhalb der Diagonale nur Null und -1 und von den $\varrho-2$ ersten Diagonalgliedern ist mindestens eins gleich 1.

In der angegebenen Weise können wir fortfahren und nach $(\varrho-1)$ Schritten sind die Systeme a und b in das Einheitssystem verwandelt. Die benutzten Transformationssysteme seien

$$g_1, g_2, \ldots, g_{\varrho-1}; \qquad h_1, h_2, \ldots, h_{\varrho-1}, \tag{104}$$

wo h_i das reziproke zu g_i sein soll. Es wird

$$\begin{cases} g_1 b \bar{g}_1 = b^{(1)}, \ g_2 b^{(1)} \bar{g}_2 = b^{(2)}, \ \ldots, \ g_{\varrho-1} b^{(\varrho-2)} \bar{g}_{\varrho-1} = b^{(\varrho-1)} = 1, \\ \bar{h}_1 a h_1 = a^{(1)}, \ \bar{h}_2 a^{(1)} h_2 = a^{(2)}, \ \ldots, \ \bar{h}_{\varrho-1} a^{(\varrho-2)} h_{\varrho-1} = a^{(\varrho-1)} = 1. \end{cases} \tag{105}$$

Setzen wir also

$$g = g_{\varrho-1} g_{\varrho-2} \cdots g_1, \qquad h = h_1 h_2 \ldots h_{\varrho-1}, \tag{106}$$

so schließen wir aus (105)

$$g b \bar{g} = 1, \qquad \bar{h} a h = 1, \tag{107}$$

oder, da $gh = 1$,

$$b = h \bar{h}, \qquad a = \bar{g} g. \tag{108}$$

Da die Systeme g_i, h_i alle die Determinante 1 haben, so gilt dasselbe von g und h, also ist auch

(109) $$|a| = |b| = 1,$$

wie schon oben angegeben.

Wir hatten gesetzt ((77), Nr. 8)

(110) $$2 - b_{kk} = c_k, \quad (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varrho) = \beta, \quad (c_1, c_2, \ldots, c_\varrho) = c$$

und es bestand die Gleichung (78), Nr. 8, nämlich

(111) $$\beta b = c.$$

Wegen (108) folgt hieraus

(112) $$\beta h = c\bar{g}.$$

Für $c\bar{g}$ ergibt sich ein sehr einfacher Wert. Wir setzen zunächst

(113) $$c^{(1)} = c\bar{g}_1, \quad c^{(2)} = c^{(1)}\bar{g}_2, \quad \ldots, \quad c^{(\varrho-1)} = c^{(\varrho-2)}\bar{g}_{\varrho-1}.$$

Nun lautet die i-te Zeile in g_1

(114) $$0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, -b_{i\varrho},$$

wo die 1 an i-ter Stelle steht. Daher ist die i-te Zeile in $g_1 b$

(115) $$b_{i1} - b_{i\varrho} b_{\varrho 1}, \quad b_{i2} - b_{i\varrho} b_{\varrho 2}, \quad \ldots, \quad b_{ii} - b_{i\varrho} b_{\varrho i}, \quad \ldots, \quad b_{i\varrho} - b_{i\varrho} b_{\varrho\varrho}.$$

Ferner ist (113) auch die i-te Kolonne von $\bar{g}_1$. Wir erhalten also das i-te Element der i-ten Zeile von $g_1 b \bar{g}_1 = b^{(1)}$, also das Element $b_{ii}^{(1)}$ durch Multiplikation der beiden Reihen (114) und (115). Daher ist

$$b_{ii}^{(1)} = b_{ii} - b_{i\varrho} b_{\varrho i} - b_{i\varrho}(b_{i\varrho} - b_{i\varrho} b_{\varrho\varrho}).$$

Da $b_{i\varrho} = b_{\varrho i}$ und $b_{\varrho\varrho} = 1$, so folgt

$$b_{ii}^{(1)} = b_{ii} - b_{i\varrho}^2,$$

also

(116) $$2 - b_{ii}^{(1)} = 2 - b_{ii} + b_{i\varrho}^2.$$

Andererseits folgt aus der ersten der Gleichungen (113) wegen (114)

$$c_i^{(1)} = c_i - b_{i\varrho} c_\varrho,$$

oder, da $c_i = 2 - b_{ii}$, $c_\varrho = 2 - b_{\varrho\varrho} = 1$,

(117) $$c_i^{(1)} = 2 - b_{ii} - b_{i\varrho}.$$

Aber es ist $b_{i\varrho}$ entweder 0 oder -1 und so folgt aus (116) und (117)

$$c_i^{(1)} = 2 - b_{ii}^{(1)}.$$

Ebenso läßt sich beweisen, daß allgemein

(118) $$c_i^{(k)} = 2 - b_{ii}^{(k)},$$

so daß

$$c_i^{(\varrho-1)} = 2 - b_{ii}^{(\varrho-1)}.$$

Da aber das System $b^{(\varrho-1)} = 1$ ist, so folgt

$$c_i^{(\varrho-1)} = 1.$$

Aus (113) folgt aber

$$c^{(\varrho-1)} = c\,\bar{g}.$$

Daher und wegen (112) ist

$$\beta h = c\bar{g} = (1, 1, 1, \ldots, 1). \tag{119}$$

Das System h ist aus seinen Faktoren besonders einfach zu bilden. Es ist nämlich die k-te Kolonne von h gleich der k-ten Kolonne von $h_{\varrho-k+1}$. Bezeichnen wir das System, das aus h_k hervorgeht, wenn wir die Einsen in der Diagonale durch Nullen ersetzen, mit h_k', so lautet die Behauptung

$$h = 1 + h_1' + h_2' + \cdots + h_{\varrho-1}'. \tag{120}$$

Wir können dies durch den Schluß von i auf $i+1$ beweisen. Es ist nach Definition von h_k'

$$h_k = 1 + h_k',$$

also im besonderen

$$h_1 = 1 + h_1'. \tag{121}$$

Nun sei

$$h_1 h_2 \ldots h_i = 1 + h_1' + h_2' + \cdots + h_i'. \tag{122}$$

Durch Multiplikation mit $h_{i+1} = 1 + h_{i+1}'$ folgt

$$h_1 h_2 \ldots h_{i+1} = (1 + h_1' + h_2' + \cdots + h_i')(1 + h_{i+1}').$$

Da aber, wie man leicht sieht, $h_k' h_l' = 0$ für $k < l$, so folgt

$$h_1 h_2 \ldots h_{i+1} = 1 + h_1' + \cdots + h_{i+1}'.$$

Wenn also die Gleichung (122) für i gilt, gilt sie auch für $i+1$. Da sie für $i = 1$ richtig ist, wie aus (121) folgt, so gilt sie auch für $i = \varrho - 1$. Das gibt aber die Behauptung.

Es ist aber nach Definition die k-te Spalte von $h_{\varrho-k+1}$ gleich der k-ten Spalte von $b^{(\varrho-k)}$. Es ist daher die k-Spalte von $h_{\varrho-k+1}$ und nach dem eben Bewiesenen auch die von h gleich

$$b_{1k}^{(\varrho-k)},\ b_{2k}^{(\varrho-k)},\ \ldots,\ b_{k-1,k}^{(\varrho-k)},\ b_{k,k}^{(\varrho-k)},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0.$$

Ist daher das System q definiert durch

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_\varrho),$$

und setzen wir

$$q\,h = s, \tag{123}$$

so wird

$$s_k = q_1\, b_{1k}^{(\varrho-k)} + q_2\, b_{2k}^{(\varrho-k)} + \cdots + q_{k-1}\, b_{k-1.k}^{(\varrho-k)'} + b_{kk}^{(\varrho-k)}\, q_k, \tag{124}$$

eine Gleichung, die wir weiter unten gebrauchen.

Die in dieser Nr. definierten Systeme $a^{(i)}$, $b^{(i)}$ gehen aus den gleichbezeichneten Systemen der vorigen Nr. dadurch hervor, daß man sie mit Reihen des Einheitssystems zu Systemen von ϱ^2 Elementen auffüllt.

11. Kurvenscharen.

Es seien $G_1, G_2, \ldots, G_\sigma$ $(\sigma \geqq 2)$ irgendwelche Polynome in x, y ohne einen allen gemeinsamen Teiler. Wir setzen

$$G = l_1 G_1 + l_2 G_2 + \cdots + l_\sigma G_\sigma, \tag{125}$$

wo die l_i von x, y unabhängige Parameter sein sollen. Die Gleichung $G = 0$ definiert dann eine lineare Kurvenschar in der $x\,y$-Ebene. Es sei G in x, y vom Grade (α, β). Dann setzen wir

$$G = A\, L^{-\alpha} M^{-\beta}, \qquad G_i = A_i\, L^{-\alpha} M^{-\beta}, \tag{126}$$

wo L und M wie früher die Nenner von x und y bedeuten sollen. Dann sind die Divisoren A_i alle untereinander und zu A äquivalent, da sie zu $L^\alpha M^\beta$ äquivalent sind. Wir setzen

$$A = l_1 A_1 + l_2 A_2 + \cdots + l_\sigma A_\sigma. \tag{127}$$

Diese Gleichung ist nicht nur eine symbolische, sondern sie gilt für jede Stelle des Körpers T, wenn wir unter den A, A_i die zugeordneten Funktionen verstehen. Die Gesamtheit der durch (127) definierten Divisoren A heißt eine lineare Divisorenschar. Sie sei mit $\langle A \rangle$ bezeichnet.

Es sei S eine Stelle von T, durch die alle Primteiler A_i gehen. Es heißt S ein Basis- oder Grundpunkt von $\langle A \rangle$. Wir transformieren die Stelle S durch die im vorhergehenden besprochene Substitution. Es sei

$$s A = \mathfrak{B}_1^{q_1} \mathfrak{B}_2^{q_2} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{q_\varrho} \tag{128}$$

und

$$A = \mathfrak{A}\, s A, \qquad A_i = \mathfrak{A}_i\, s A, \tag{129}$$

so daß

$$\mathfrak{A} = l_1 \mathfrak{A}_1 + l_2 \mathfrak{A}_2 + \cdots + l_\sigma \mathfrak{A}_\sigma. \tag{130}$$

Ferner sei

$$A' = l_1' A_1' + l_2' A_2' + \cdots + l_\sigma' A_\sigma', \qquad A' = \mathfrak{A}'\, s A. \tag{131}$$

Wie Herr M. Noether gezeigt hat, kann man die Substitution immer so wählen, daß ein mehrfacher Punkt, den ein Primteiler oder ein ganzer

Divisor ohne mehrfache Faktoren in S hat, vollkommen aufgelöst wird. Wir können und wollen daher die Substitution so annehmen, daß die dem Divisor AA' entsprechende Kurve $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ an keiner der aus S hervorgehenden Stellen höherer Ordnung eine mehrfache Stelle hat. Dann können sich die Kurven $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, d. h. zwei beliebige Kurven der Schar $\langle\mathfrak{A}\rangle$ an keiner der aus S hervorgegangenen Stellen schneiden. Und es kann auch keine Kurve der Schar $\langle\mathfrak{A}\rangle$, solange nicht die Parameter l_i speziell gewählt sind, an einer der Stellen, die aus S hervorgehen, eine mehrfache Stelle haben. Deuten wir durch den Index 0 an eine Größe an, daß nur der Beitrag der Stelle S oder der aus S hervorgegangenen Stellen gemeint ist, so ist also

$$(132) \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')_0 = 0, \qquad 2\sigma_0(\mathfrak{A}) = 0.$$

Wir bestimmen die Zahl

$$n_0 = (A, A')_0$$

der Schnittpunkte zweier beliebigen Kurven der Schar $\langle A\rangle$ in S. Nach (45), Nr. 7 wird

$$(133) \qquad n_0 = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')_0 - (sA, sA),$$

also wegen (132) und (128)

$$(134) \qquad n_0 = \sum q_k q_l b_{kl} = q b \bar{q},$$

wenn wir wieder unter q das aus der einen Zeile $q_1, q_2, \ldots, q_\varrho$ bestehende System verstehen und unter $\bar{q}$ das zu q adjungierte, also das aus der einen Spalte $q_1, q_2, \ldots, q_\varrho$ bestehende System. Nach (108), Nr. 10 wird

$$n_0 = q h \bar{h} \bar{q} = q h (\overline{q h}).$$

Setzen wir also

$$(135) \qquad q h = s,$$

so wird

$$(136) \qquad n_0 = s\bar{s} = s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_\varrho^2.$$

Wir bestimmen zweitens den Beitrag, den S zur Ordnung $2\sigma_A$ des Divisors der mehrfachen Punkte einer allgemeinen Kurve A liefert. Der Beitrag sei bezeichnet mit $2d_0$. Nach (47), Nr. 7 ist

$$(137) \qquad 2d_0 = 2\sigma_0(\mathfrak{A}) - (sA, sA) + (sA, \mathfrak{B})$$

oder wegen (26), Nr. 5, (128), (132), (133)

$$(138) \qquad 2d_0 = n_0 - \sum q_k \beta_l b_{kl}.$$

Es ist

$$\sum q_k \beta_l b_{kl} = \beta b \bar{q} = \beta h \bar{h} \bar{q} = \beta h (\overline{q h}) = \beta h \bar{s}.$$

Wegen (119), Nr. 10 wird also

$$(139)\qquad \sum q_k \beta_l b_{kl} = s_1 + s_2 + \cdots + s_\varrho .$$

Nach (136), (138), (139) wird

$$(140)\qquad 2d_0 = s_1(s_1 - 1) + s_2(s_2 - 1) + \cdots + s_\varrho(s_\varrho - 1).$$

Aus (136), (140) folgt: *Es ist die Zahl der Schnittpunkte zweier allgemeiner Kurven der Schar $\langle A\rangle$ in S und der Beitrag von S zu der Ordnung des Divisors der mehrfachen Punkte einer allgemeinen Kurve A gerade so groß, als ob die Kurven der Schar $\langle A\rangle$ statt der festen Stelle S ϱ getrennt liegende gewöhnliche mehrfache Punkte mit beweglichen Tangenten hätten, und als ob die Vielfachheit dieser Punkte $s_1, s_2, \ldots, s_\varrho$ wäre.*

Die Zahlen s_i sind definiert durch (135), so daß s_k gegeben ist durch (124), Nr. 10. Vergleichen wir dies mit (95), Nr. 9, so folgt

$$(141)\qquad s_k = s^{(k)}.$$

Damit haben wir für die Zahlen s_k eine geometrische Bedeutung gewonnen. Denn nach der Definition der $s^{(k)}$ in Nr. 9 gilt folgendes. Es entstehe die Kurve $\mathfrak{B}_k$ durch Auflösen der Stelle S' und es sei

$$u = g(\lambda', \mu'), \qquad v = h(\lambda', \mu')$$

die Substitution, die zur Stelle S' führt. Wird durch diese Substitution

$$A = \lambda'^a \mu'^b \mathfrak{A}^{(\varrho-k)} = \lambda'^a \mu'^b \{ l_1 \mathfrak{A}_1^{(\varrho-k)} + l_2 \mathfrak{A}_2^{(\varrho-k)} + \cdots + l_n \mathfrak{A}_n^{(\varrho-k)} \},$$

so haben die Kurven $\mathfrak{A}^{(\varrho-k)}$ an der Stelle S' einen s_k-fachen Punkt. Damit ist gezeigt, daß die s_i die Noetherschen Zahlen sind, die die Art des Punktes S beschreiben. Der Punkt S selbst ist danach ein s_1-facher Punkt der Kurven A.

Wir wollen noch sehen, in welcher Beziehung die Primteiler $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$ zu dem Verhalten der Kurven A in S stehen.

Zunächst zeigen wir: Ist $\mathfrak{B}_0$ ein Primteiler zweiter Art und werden für $\mathfrak{B}_0 = 0$ die Verhältnisse der A_i nicht konstant, so ist $\mathfrak{B}_0$ einer der Primteiler $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_\varrho$.

Nehmen wir an, diese Behauptung sei falsch, so bleibt $\mathfrak{B}_0$ auch nach Auflösung der Stelle S ein Primteiler zweiter Art, gehört also zu einer der neuen aus S entstandenen Stellen. Sie heiße S_1. Sind λ, μ die Hilfsgrößen für die Umgebung von S_1, so werden λ und μ beide Null für $\mathfrak{B}_0 = 0$. Da aber die Kurven $\mathfrak{A}_i$, die den Divisoren A_i entsprechen, durch keine der neuen Stellen gleichzeitig gehen, so werden für $\lambda = \mu = 0$ die zugeordneten Funktionen $\mathfrak{A}_i(\lambda, \mu)$ für die Stelle S_1 nicht sämtlich

Null. Es werden also die Verhältnisse der $\mathfrak{A}_i(\lambda, \mu)$, d. h. die der $A_i(u, v)$ für $\lambda = \mu = 0$, also für $\mathfrak{B}_0 = 0$, doch konstant.

Wir beweisen zweitens einen Hilfssatz. Es seien $\xi_1(\tau)$, $\xi_2(\tau), \ldots,$ $\xi_\sigma(\tau)$ ganze rationale Funktionen von τ ohne gemeinsamen Teiler. Dann hat die Funktion

$$l_1\xi_1(\tau) + l_2\xi_2(\tau) + \cdots + l_\sigma\xi_\sigma(\tau),$$

wo die l_i von τ unabhängige Parameter sein sollen, bei nicht speziell gewählten l_i keine mehrfache Nullstelle. Denn eine solche Nullstelle müßte den Gleichungen

$$l_1\xi_1(\tau) + l_2\xi_2(\tau) + \cdots + l_\sigma\xi_\sigma(\tau) = 0,$$
$$l_1\xi_1'(\tau) + l_2\xi_2'(\tau) + \cdots + l_\sigma\xi_\sigma'(\tau) = 0$$

genügen, wo durch den Akzent die Ableitung nach τ angedeutet ist. Aus diesen beiden Gleichungen können wir aber Gleichungen herleiten, die von l_1 oder von l_2 oder von l_3 usw. unabhängig sind. Die betreffende Nullstelle müßte daher unabhängig von den l_i sein, so daß sie gemeinsame Nullstelle der Funktionen ξ_i würde; das aber ist unmöglich, da die ξ_i keinen gemeinsamen Faktor haben.

Nun können wir drittens zeigen, wie sich die Divisoren A in S verhalten. Die Divisoren A haben in S, wie wir sahen, einen s_1-fachen Punkt. Wir können annehmen, daß wenigstens in einem A_i (u, v) das Glied mit v^{s_1} vorkommt. Sonst würden wir statt u, v durch eine lineare homogene Transformation neue Hilfsgrößen einführen. Der Koeffizient von v^{s_1} in A_i sei k_i. Dann können wir setzen

$$A = (l_1k_1 + l_2k_2 + \cdots + l_\sigma k_\sigma)(v - v^{(1)})(v - v^{(2)})\ldots(v - v^{(s_1)})E_1(u, v),$$

wo die $v^{(i)}$ nach steigenden Potenzen von u fortschreitende Potenzreihen von u sind, die für $u = 0$ verschwinden, und wo E_1 eine Einheit für die Stelle $u = v = 0$ ist. Da die k_i nicht alle Null sind, so ist bei nicht speziell gewählten l_i der erste Faktor von A nicht Null und wir vereinigen ihn mit E_1 zu E, so daß

$$A = (v - v^{(1)})(v - v^{(2)})\ldots(v - v^{(s_1)})E(u, v). \tag{142}$$

Es sei etwa

$$v^{(1)} = a_1u^{\alpha_1} + a_2u^{\alpha_2} + \cdots + a_\nu u^{\alpha_\nu} + \cdots. \tag{143}$$

Da die A_i keinen gemeinsamen Faktor haben, so können die Koeffizienten a_k nicht sämtlich von den Parametern l_i unabhängig sein. Es sei a_ν der erste von den l_i wirklich abhängige Koeffizient. Wir setzen dann

$$v_1 = a_1u^{\alpha_1} + a_2u^{\alpha_2} + \cdots + a_{\nu-1}u^{\alpha_{\nu-1}} + t_1u^{\alpha_\nu}. \tag{144}$$

Hierdurch wird ein zur Stelle S gehörender Primteiler zweiter Art defi-

niert. Er sei $\mathfrak{B}^{(1)}$ genannt. Ich behaupte, es ist $\mathfrak{B}^{(1)}$ einer der Primteiler $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$. Um das zu beweisen, zeigen wir, daß für $\mathfrak{B}^{(1)} = 0$ die Verhältnisse der A_i nicht konstant werden. Es sei, nach steigenden Potenzen von u geordnet,

$$A(u, v_1) = \xi(t_1) u^\alpha + \cdots. \tag{145}$$

Ferner sei A' derjenige Divisor A, wo die l_i durch l_i' ersetzt sind, und es sei

$$A'(u, v_1) = \xi'(t_1) u^\alpha + \cdots.$$

Dann ist

$$\left\{\frac{A}{A'}\right\}_{\mathfrak{B}^{(1)}=0} = \frac{\xi(t_1)}{\xi'(t_1)}.$$

Aber aus (142), (143), (144) folgt, daß $\xi(t_1)$ und $\xi'(t_1)$ die Faktoren

$$t_1 - a_\nu(l_1, l_2, \ldots, l_n), \qquad t_1 - a_\nu(l_1', l_2', \ldots, l_n')$$

haben, und da a_ν von den l_i wirklich abhängt, so können sich diese Faktoren nicht fortheben. Es wird also A/A' für $\mathfrak{B}^{(1)} = 0$ nicht konstant, also auch nicht die Verhältnisse der A_i.

Es sei etwa $\mathfrak{B}^{(1)}$ mit $\mathfrak{B}_1$ identisch. Der Hauptnenner der Exponenten $\alpha_1, \ldots \alpha_\nu$ sei wie früher β_1'' und er sei δ-mal so groß wie der Hauptnenner der ersten $\nu - 1$ Exponenten α_i. Wir setzen dann wie früher $t_1^\delta = \tau_1$.

Unter den Reihen $v^{(2)}, v^{(3)}, \ldots$ in (142) kann keine vorkommen, die mit $v^{(1)}$ in den ersten ν Gliedern übereinstimmt. Wäre das nämlich der Fall, so würde $\xi(t_1)$ in (145) den Faktor $t_1 - a_\nu$ doppelt haben. Ist aber $A_i = u^\alpha \xi_i(t_1) + \cdots$, so ist

$$\xi(t_1) = l_1 \xi_1(t_1) + \cdots + l_n \xi_n(t_1)$$

und nach dem Hilfssatze hat $\xi(t_1)$ keinen mehrfachen Faktor, der von den l_i abhängt. Daraus folgt auch, daß der Hauptnenner aller Exponenten α_k in (143) gleich β_1'' sein muß. In der Entwicklung (143) gibt es also $\beta_1'' - 1$ konjugierte. Wir setzen

$$V_1 = (v - v^{(1)})(v - v^{(2)}) \ldots (v - v^{(\beta_1'')}) = \operatorname{Norm}(v - v^{(1)}),$$

wo $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(\beta_1'')}$ zueinander konjugiert sein sollen. Wir nennen die Funktion V_1 wegen ihrer Beziehung zu $\mathfrak{B}_1$ eine *Quelle von* $\mathfrak{B}_1$. Sie steht zu der Eichfunktion B_1 von $\mathfrak{B}_1$ in folgender Beziehung:

Ist v_0 irgendeine Potenzreihe von u, deren Koeffizienten von τ_1 und von den l_i unabhängig sind, so ist $\mathsf{B}_1(u, v_0)$ genau durch dieselbe Potenz von u teilbar wie $V_1(u, v_0)$. Im besondern folgt hieraus, daß

$$s V_1 = s \mathsf{B}_1. \tag{146}$$

Unter den Entwicklungen $v^{(i)}$ $(i > 1)$ kann zwar keine vorkommen, die mit $v^{(1)}$ in den ersten ν Gliedern übereinstimmt, wohl aber eine oder

mehrere, die in den ersten $\nu - 1$ Gliedern mit $v^{(1)}$ übereinstimmen und wo der Exponent der ν-ten Glieder auch α_ν ist.

Hiernach erhalten wir für A folgende Darstellung:

$$(147)\qquad \begin{cases} A = E\,V_{11}\,V_{12}\ldots V_{1r_1} \\ \qquad V_{21}\,V_{22}\ldots V_{2r_2} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad V_{\varrho 1}\,V_{\varrho 2}\ldots V_{\varrho r_\varrho}, \end{cases}$$

wo E eine Einheit ist und wo die V_{ki} Quellen von $\mathfrak{B}_k$ sind. Die Zahlen r_i können zum Teil auch Null sein. Sie haben eine einfache geometrische Deutung. Da nämlich wegen (146) $s\,V_{ki} = s\,\mathsf{B}_k$, und A nach (128) durch $\mathfrak{B}_l^{q_l}$ teilbar ist, so folgt

$$(148)\qquad q = r a, \qquad r = q b.$$

Es ist also

$$(149)\quad (\mathfrak{B}_l, \mathfrak{A}) = \left(\mathfrak{B}_l \frac{A}{sA}\right) = -(\mathfrak{B}_l, sA) = q_1 b_{l1} + q_2 b_{l2} + \cdots + q_\varrho b_{l\varrho} = r_l.$$

Es gilt auch folgende Umkehrung: *Es lasse sich $A = \Sigma l_i A_i$ in der Umgebung von S in der Form* (147) *darstellen. Es werde die Stelle S durch eine Folge von quadratischen Transformationen so aufgelöst, daß die Primteiler zweiter Art $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$ in Kurven übergehen. Setzen wir dann*

$$A = \mathfrak{A}\,s A,$$

so haben die Kurven der Schar $\langle\mathfrak{A}\rangle$ an keiner der aus S hervorgegangenen Stellen feste Schnittpunkte.

Setzen wir nämlich

$$sA = \mathfrak{B}_1^{q_1}\,\mathfrak{B}_2^{q_2}\ldots\mathfrak{B}_\varrho^{q_\varrho},$$

so folgt aus (147) die Gleichung (148). Nach (133) wird

$$(150)\qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')_0 = n_0 + (sA, sA) = n_0 - q b \bar{q}.$$

Ferner folgt aus (147) wegen der Beziehung der Quellen zu den Eichfunktionen

$$n_0 = (A, A')_0 = \sum r_k r_l a_{kl} = r a \bar{r}$$

oder wegen (148) und da $\bar{b} = b$, $ab = a\bar{b} = 1$,

$$n_0 = q b a \bar{b} \bar{q} = q b \bar{q},$$

so daß aus (150) folgt

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')_0 = 0,$$

was zu beweisen war.

Die Darstellung (147) kann man finden, wenn die Divisorenschar $\langle A\rangle$ gegeben ist. *Es ergeben sich daraus aber nicht immer alle $\mathfrak{B}_i$, da einige der Zahlen r_i Null sein können.*

Es ergibt sich hieraus auch [für $\sigma = 2$], wie man diejenigen Primteiler zweiter Art bestimmt, die, gleich Null gesetzt, eine gegebene Funktion A_1/A_2 nicht zu einer Konstanten machen.

12. Singuläre Punkte.

Es sei P ein ganzer Divisor erster Art ohne mehrfache Faktoren. Er habe in S einen singulären Punkt. Die Transformation, die die Stelle S auflöst, sei so gewählt, daß die Singularität von P ganz aufgelöst wird, was nach dem Noetherschen Verfahren immer geht. Setzen wir

(151) $$P = \mathfrak{P}\, s P,$$

so ist dann

(152) $$2\,\sigma_0(\mathfrak{P}) = 0,$$

wo der Index 0 wieder andeuten soll, daß nur der Teil zu nehmen ist, der von der Stelle S oder den aus ihr hervorgegangenen Stellen herrührt. Es sei

(153) $$s P = \mathfrak{B}_1^{p_1}\, \mathfrak{B}_2^{p_2} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{p_\varrho}.$$

Der Beitrag von S zu der Ordnung des Divisors der mehrfachen Stellen von P sei $2\,d_0$. Nach (47), Nr. 7 wird

(154) $$2\,d_0 = 2\,\sigma_0(\mathfrak{P}) - (sP, sP) + (sP, \mathfrak{B})$$

oder wegen (152), (153)

$$2\,d_0 = p b \bar{p} - \beta b \bar{p}$$

und wegen (108), Nr. 10

$$2\,d_0 = p h (\overline{p h}) - \beta h (\overline{p h}).$$

Setzen wir

(155) $$p h = t,$$

so ergibt sich wegen (119), Nr. 10

(156) $$2\,d_0 = t_1(t_1 - 1) + t_2(t_2 - 1) + \cdots + t_\varrho(t_\varrho - 1).$$

Es sei Q ein zweiter ganzer Divisor erster Art ohne mehrfache Faktoren und es sei Q zu P teilerfremd. Auch Q habe in S einen singulären Punkt. Die Transformation der Stelle S sei jetzt so beschaffen, daß die Singularität des Divisors PQ vollkommen aufgelöst wird. Setzen wir

(157) $$Q = \mathfrak{Q}\, s Q = \mathfrak{Q}\, \mathfrak{B}_1^{q_1}\, \mathfrak{B}_2^{q_2} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{q_\varrho},$$

so ist dann

(158) $$2\,\sigma_0(\mathfrak{Q}) = 0, \qquad (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})_0 = 0.$$

Nach (47), Nr. 7 wird unter Benutzung von (157), (158) und von (108), Nr. 10

$$(P, Q)_0 = (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})_0 - (sP, sQ) = p b \bar{q} = p h (\overline{q h}).$$

Setzen wir also

(159) $$qh = s,$$

so ergibt sich

(160) $$(P, Q)_0 = s_1 t_1 + s_2 t_2 + \cdots + s_\varrho t_\varrho.$$

Wir können also bei der Berechnung von $2d_0$ und $(P, Q)_0$ so verfahren, als ob P und Q statt des singulären Punktes S ϱ getrennt liegende gemeinsame gewöhnliche mehrfache Punkte mit getrennt liegenden Tangenten hätten von den Vielfachheiten $t_1, t_2, \ldots, t_\varrho$ und $s_1, s_2, \ldots, s_\varrho$.

Die Transformation, die die Singularität von PQ auflöst, löst natürlich auch die von P auf, aber i. a. genügt schon eine einfachere Transformation zur Auflösung der Singularität von P. Es ist also die Zahl ϱ in (157) i. a. größer als in (153). Die Zahlen t_i in (160) sind aber doch dieselben wie in (156), nur daß Nullen hinzugekommen sind, da durch einige der mehrfachen Stellen, in die die Singularität von Q aufgelöst wird, P nicht hindurchgeht.

Wir bestimmen noch den Zusammenhang der Singularität von P mit den Kurven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$. Es hat P in S einen t_1-fachen Punkt. Wir können annehmen, daß in $P(u, v)$ das Glied v^{t_1} wirklich vorkommt. Es sei

(161) $$P(u, v) = (v - v^{(1)})(v - v^{(2)}) \ldots (v - v^{(t_1)}) \cdot E.$$

Es seien

(162) $$\begin{cases} v^{(1)} = a_1 u^{\alpha_1} + a_2 u^{\alpha_2} + \cdots + a_{\nu-1} u^{\alpha_{\nu-1}} + a_\nu u^{\alpha_\nu} + \cdots, \\ v^{(2)} = a_1 u^{\alpha_1} + a_2 u^{\alpha_2} + \cdots + a_{\nu-1} u^{\alpha_{\nu-1}} + b_\nu u^{\alpha_\nu} + \cdots \end{cases}$$

zwei der Wurzeln von $P = 0$, die in den ersten $\nu - 1$ Gliedern übereinstimmen; im ν-ten aber nicht, so daß $a_\nu \neq b_\nu$. Ich behaupte: der durch

(163) $$v_1 = a_1 u^{\alpha_1} + a_2 u^{\alpha_2} + \cdots + a_{\nu-1} u^{\alpha_{\nu-1}} + t_1 u^{\alpha_\nu}$$

definierte Primteiler zweiter Stufe $\mathfrak{B}^{(1)}$ ist unter den $\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$ enthalten. Es steht aber nicht immer umgekehrt jede Kurve $\mathfrak{B}_i$ zu zwei Wurzeln von $P(u, v) = 0$ in der angegebenen Beziehung.

Zum Beweise nehmen wir an, es bleibe $\mathfrak{B}^{(1)}$ Primteiler zweiter Art und gehöre zu einer der aus S hervorgehenden Stellen, etwa zu S'. Es seien λ, μ die Hilfsgrößen für diese Stelle. $\mathfrak{B}^{(1)}$ werde für die Umgebung dieser Stelle definiert durch

(164) $$\mu = \mu_1 = e_1 \lambda^{\varepsilon_1} + e_2 \lambda^{\varepsilon_2} + \cdots + e_{\gamma-1} \lambda^{\varepsilon_{\gamma-1}} + t \lambda^{\varepsilon_\gamma}.$$

Es sei für die Umgebung von S'

(165) $$P(u, v) = \lambda^p \mu^q \mathfrak{P}(\lambda, \mu).$$

In (163) sei der Hauptnenner der Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ δ-mal so groß wie der der ersten $\nu - 1$ Exponenten α_i und in (164) sei der Hauptnenner der Exponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\gamma$ ε-mal so groß wie der der ersten $\gamma - 1$ Exponenten ε_i. Setzen wir dann $t_1^\delta = \tau_1$, $t^\varepsilon = \tau$, so gehört zu jeder Stelle des Körpers $\mathfrak{B}^{(1)}$ ein und nur ein Wert von τ_1 und ein und nur ein Wert von τ (vgl. Nr. 2). Zwischen τ und τ_1 besteht also eine bilineare Gleichung, so daß zu jedem Wert von τ_1 ein Wert τ gehört und umgekehrt.

Es sei nach steigenden Potenzen von u geordnet

$$P(u, v_1) = g_0(\tau_1)\, u^\alpha + \cdots. \tag{166}$$

Dann ist wegen (161), (162) $g_0(\tau_1)$ durch $(\tau_1 - a_\nu^\delta)\,(\tau_1 - b_\nu^\delta)$ teilbar. Ferner sei

$$\mathfrak{P}(\lambda, \mu_1) = \mathfrak{g}_0(\tau)\, \lambda^\beta + \cdots. \tag{167}$$

Da die Auflösung der Stelle S so beschaffen sein soll, daß die Kurve $\mathfrak{P}$ an keiner der aus S hervorgehenden Stellen einen mehrfachen Punkt hat, so ist $\mathfrak{g}_0(\tau)$ höchstens vom ersten Grade in τ. Nun hat u als Funktion von λ, μ die Form (vgl. Nr. 3)

$$u = \lambda^r \mu^s E(\lambda, \mu), \tag{168}$$

wo $E(0, 0) \neq 0$.

Es wird

$$\left\{\frac{P(u, v)}{u^\alpha}\right\}_{\mathfrak{B}^{(1)}=0} = g_0(\tau_1).$$

Andererseits ist wegen (165), (167), (168)

$$\left\{\frac{P(u, v)}{u^\alpha}\right\}_{\mathfrak{B}^{(1)}=0} = \frac{\mathfrak{g}_0(\tau)}{E^\alpha(0, 0)}.$$

Die Faktoren λ, μ müssen sich fortheben, da sie beide für $\mathfrak{B}^{(1)} = 0$ zu Null werden. Da aber $g_0(\tau_1)$ die Faktoren $\tau_1 - a_\nu^\delta$ und $\tau_1 - b_\nu^\delta$ enthält, $\mathfrak{g}_0(\tau)$ höchstens vom ersten Grade ist, so ergibt sich ein Widerspruch, da zwischen τ_1 und τ eine bilineare Gleichung besteht.

Halle a. d. S., Mai 1921.

(Eingegangen am 15. 5. 1921.)

Über Kreise und Kugeln im Riemannschen Raum. II.

Von

B. Baule in Graz.

Die vorliegenden Untersuchungen schließen sich eng an eine unter dem gleichen Titel in dieser Zeitschrift erschienene Arbeit an[1]). Es wurden dort zwei verschiedene Definitionen für den Kreis und die Kugel auf die Riemannsche Geometrie, deren Maßbestimmung durch eine beliebige positiv definite quadratische Differentialform mit veränderlichen Koeffizienten gegeben war, übertragen. Dabei zeigte sich, daß nur auf den Flächen mit konstantem Gaußschem Krümmungsmaß die „Entfernungskreise" (geometrischer Ort der Punkte gleichen geodätischen Abstandes) zugleich „Krümmungskreise" (Kurve konstanter geodätischer Krümmung), daß nur im Raum konstanter Riemannscher Krümmung (euklidischer und nicht-euklidischer Geometrie) die „Entfernungskugeln" (geometrischer Ort der Punkte gleichen geodätischen Abstandes) zugleich „Krümmungskugeln" (geschlossene Fläche konstanter mittlerer Krümmung) sind. Und es ergab sich, daß es nur auf Flächen mit konstanter Gaußscher Krümmung und nur in Räumen mit konstanter Gaußscher (skalarer) Krümmung *geschlossene* Krümmungskreise bzw. Krümmungskugeln geben kann, die sich bei Wahrung ihrer Eigenschaft auf jeden Punkt zusammenziehen lassen.

[1]) B. Baule, Über Kreise und Kugeln im Riemannschen Raum. I. Math. Ann. **83**, S. 286.

In den vorliegenden Ausführungen soll die entsprechende Frage, die für die Krümmungskreise *auf Flächen* beantwortet wurde, für die „Krümmungskreise" *im Raum* mit Riemannscher Maßbestimmung (Kurven konstanter Krümmung und verschwindender Windung) erledigt werden.

Es ergibt sich als notwendige Bedingung für die Geschlossenheit aller Kreise zunächst das identische Verschwinden der „kovarianten Ableitung" des Riemannschen Krümmungstensors. Daraus wiederum folgt, daß der Raum entweder euklidisch oder nichteuklidisch sein oder endlich ein Bogenelement haben muß von der Form

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + \frac{1}{K}\sin^2(\sqrt{K}\,r)\,d\varphi^2, \quad K = \text{konst.}$$

Das Problem stammt von W. Blaschke, dem ich auch für manchen guten Rat bei der Lösung zu danken habe.

§ 1.

Die Krümmung und Windung einer Raumkurve.

Es sei die Metrik des Raumes durch eine positiv definite quadratische Differentialform mit veränderlichen Koeffizienten festgelegt,

$$ds^2 = \sum g_{ik}\,dx_i\,dx_k.$$

Was man in diesem Falle unter der Krümmung und Windung einer Raumkurve $x_i = x_i(s)$ zu verstehen hat, hat W. Blaschke in einer „Frenets Formeln für den Raum von Riemann"[2]) überschriebenen Arbeit dargelegt.

Es ist die *Krümmung*

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} & \dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{\sqrt{D_2}}{D_1} \\ \text{und die } \textit{Windung} & \\ & \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\sqrt{D_1 D_3}}{D_2}. \end{array}\right.$$

Darin bedeuten D_1, D_2, D_3 die ein-, zwei- und dreireihige Determinante links oben in der Matrix

$$(2)\qquad D \equiv \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \end{vmatrix},$$

und (r, s) bezeichnet das skalare Produkt der Vektoren $\xi_{(r)}$ und $\xi_{(s)}$, die ihrerseits durch $(r-1)$- bzw. $(s-1)$-malige „kovariante Ableitung" aus dem Tangentenvektor

---

[2]) W. Blaschke, Frenets Formeln für den Raum von Riemann. Math. Zeitschr. **6**, S. 94.

$$
(3)\quad \text{entstehen:}\left\{\begin{aligned}
\xi^i_{(1)} &= \frac{dx_i}{ds} \\
\xi^i_{(2)} &= \frac{d\xi^i_{(1)}}{ds} + \sum_{r,s} \Gamma^i_{rs}\, \xi^r_{(1)} \xi^s_{(1)}, \\
\xi^i_{(3)} &= \frac{d\xi^i_{(2)}}{ds} + \sum_{r,s} \Gamma^i_{rs}\, \xi^r_{(2)} \xi^s_{(2)},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(4)\qquad (r, s) = \sum g_{ik}\, \xi^i_{(r)} \xi^k_{(s)}.
$$

Durch Γ^i_{rs} sind nach dem Vorbild von H. Weyl die „Christoffelschen Dreiindizessymbole“ $\left\{ {rs \atop i} \right\}$ bezeichnet.

§ 2.

Koordinaten.

Als Koordinaten sollen Riemannsche Normalkoordinaten und Zylinderkoordinaten nebeneinander verwandt werden.

Bei Zugrundelegung Riemannscher Normalkoordinaten hat das Quadrat des Bogenelementes die Gestalt:

$$
ds^2 = \sum dy_i^2 + \sum \mathfrak{P}_{ik,rs}\, p_{ik}\, p_{rs},
$$

worin

$$
p_{ik} = y_i\, dy_k - y_k\, dy_i
$$

und die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ durch die Metrik des Raumes bestimmte konvergierende Potenzreihen in den y_i sind:

$$
\mathfrak{P}_{ik,rs} = \alpha_{ik,rs} + \sum \beta^{(t)}_{ik,rs}\, y_t + \cdots.
$$

Bei geeigneter Normierung werden die $\mathfrak{P}_{ik,rs}$ durch die Metrik des Raumes eindeutig bestimmt. Es sind dann die $\alpha_{ik,rs}$ die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors im Nullpunkt, die $\beta^{(t)}_{ik,rs}$ deren Ableitungen nach y_t, und die späteren Koeffizienten setzen sich ebenfalls aus den Komponenten des Krümmungstensors und deren Ableitungen im Nullpunkt in bestimmter einfacher Weise zusammen (vgl. I § 8). Will man eine strenge Unterscheidung zwischen „kovarianten“ und „kontravarianten“ Vektorkomponenten in der Schreibweise haben, so hat man bei den p_{ik} wie bei den y_i die Indizes nach oben, bei den $\beta^{(t)}_{ik,rs}$ aber auch das (t) nach unten zu setzen. Aus Bequemlichkeitsgründen ist das hier wie in I nicht geschehen.

Führen wir Zylinderkoordinaten ein vermittels

$$y_1 = z,$$
$$y_2 = r\cos\varphi,$$
$$y_3 = r\sin\varphi,$$

so bekommt das Bogenelement die Form:

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & (1 + \mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{B}_{11} + \ldots)\,dz^2 + (1 + \mathfrak{A}_{22} + \mathfrak{B}_{22} + \ldots)\,dr^2 \\ & + (1 + \mathfrak{A}_{33} + \mathfrak{B}_{33} + \ldots)\,r^2 d\varphi^2 \\ & + 2(\mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{B}_{12} + \ldots)\,dz\,dr + 2(\mathfrak{A}_{13} + \mathfrak{B}_{13} + \ldots)\,r\,dz\,d\varphi \\ & + 2(\mathfrak{A}_{23} + \mathfrak{B}_{23} + \ldots)\,r\,dr\,d\varphi, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{11} &= (\alpha_{31,31}s^2 + \alpha_{12,12}c^2 - \alpha_{31,12}sc)\,r^2, \\ \mathfrak{A}_{22} &= (\alpha_{31,31}s^2 + \alpha_{12,12}c^2 - \alpha_{31,12}sc)\,z^2, \\ \mathfrak{A}_{33} &= \alpha_{23,23}r^2 + (\alpha_{31,31}c^2 + \alpha_{12,12}s^2 + \alpha_{31,12}sc)\,z^2 - (\alpha_{23,31}c + \alpha_{23,12}s)\,rz, \\ \mathfrak{A}_{12} &= (-\alpha_{31,31}s^2 - \alpha_{12,12}c^2 + \alpha_{31,12}sc)\,zr, \\ \mathfrak{A}_{13} &= (-\alpha_{31,31}sc + \alpha_{12,12}sc + \alpha_{31,12}(c^2 - s^2))\,zr + (\alpha_{23,31}s - \alpha_{23,12}c)\,r^2, \\ \mathfrak{A}_{23} &= (\alpha_{31,31}sc - \alpha_{12,12}sc - \alpha_{31,12}(c^2 - s^2))\,z^2 - (\alpha_{23,31}s - \alpha_{23,12}c)\,rz. \end{aligned}$$

Die $\mathfrak{B}_{ik}$ gehen aus den $\mathfrak{A}_{ik}$ dadurch hervor, daß man die in den $\mathfrak{A}_{ik}$ auftretenden $\alpha_{ik,rs}$ ersetzt durch

$$\beta^{(1)}_{ik,rs}z + \beta^{(2)}_{ik,rs}r\cos\varphi + \beta^{(3)}_{ik,rs}r\sin\varphi.$$

Es ist zur Abkürzung gesetzt:

$$c \equiv \cos\varphi; \qquad s \equiv \sin\varphi.$$

Wir hatten früher das Quadrat des Bogenelementes geschrieben:

$$ds^2 = \sum g_{ik}\,dx_i\,dx_k.$$

In unserem Falle ist also:

$$x_1 = z; \qquad x_2 = r; \qquad x_3 = \varphi$$

und

$$\|g_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 1 + \mathfrak{A}_{11} + \ldots; & \mathfrak{A}_{12} + \ldots\;; & r\mathfrak{A}_{13} + \ldots \\ \mathfrak{A}_{12} + \ldots\;; & 1 + \mathfrak{A}_{22} + \ldots; & r\mathfrak{A}_{23} + \ldots \\ r\mathfrak{A}_{13} + \ldots\;; & r\mathfrak{A}_{23} + \ldots\;; & r^2(1 + \mathfrak{A}_{33} + \ldots) \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Es sei hier auch gleich die Matrix der g^{ik} angefügt:

$$\|g^{ik}\| = \begin{Vmatrix} 1 - \mathfrak{A}_{11} - \ldots; & -\mathfrak{A}_{12} - \ldots; & -\frac{1}{r}\mathfrak{A}_{13} - \ldots \\ -\mathfrak{A}_{12} - \ldots; & 1 - \mathfrak{A}_{22} - \ldots; & -\frac{1}{r}\mathfrak{A}_{23} - \ldots \\ -\frac{1}{r}\mathfrak{A}_{13} - \ldots; & -\frac{1}{r}\mathfrak{A}_{23} - \ldots; & \frac{1}{r^2}(1 - \mathfrak{A}_{33} - \ldots) \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

§ 3.

Der Gang der Lösung.

Die Raumkurve, deren Krümmung $1:\varrho = $ konst. und deren Windung $1:\tau = 0$ vorausgesetzt wird, werde dargestellt durch

$$r = r(\varphi),$$
$$z = z(\varphi).$$

Diese beiden Funktionen von φ haben den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{1}{\varrho} = \text{konst.} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\tau} = 0$$

zu genügen, nachdem wir dort statt des Parameters s den Parameter φ eingeführt haben.

Aus der Schar sämtlicher Lösungen der Differentialgleichungen greifen wir die Schar heraus, die die unendlich kleinen konzentrischen Kreise um den Nullpunkt der geodätischen Fläche $z = 0$ in sich enthält. Berücksichtigen wir noch die Tatsache, daß die Geometrie des Raumes im Unendlichkleinen nicht nur in erster, sondern auch noch in zweiter Näherung (d. h. solange die zweiten Potenzen der Entfernungen vom Nullpunkt als gegen die Einheit verschwindend angesehen werden) euklidisch ist, was man sofort aus dem Bogenelement erkennen kann, so kann man die Gleichungen dieser Kurvenschar in der Form ansetzen:

$$(8) \qquad \begin{aligned} r &= \varrho(1 + a(\varphi)\varrho^2 + b(\varphi)\varrho^3 + \ldots), \\ z &= \varrho^2(\alpha(\varphi) + \beta(\varphi)\varrho + \ldots). \end{aligned}$$

Mit diesem Ansatz werden wir in die Differentialgleichungen hineingehen. Sie werden dann zu Identitäten, die eine Koeffizientenvergleichung gestatten. Wir bekommen auf diese Weise für die $a(\varphi)$, $b(\varphi), \ldots$, $\alpha(\varphi)$, $\beta(\varphi)$, ... eine Reihe von Differentialgleichungen, die sämtlich periodische Funktionen zu Lösungen haben müssen, wenn es eine Schar von geschlossenen Kurven der gekennzeichneten Art geben soll.

§ 4.

Die Differentialgleichungen $\frac{1}{\varrho} = \text{konst.}$, $\frac{1}{\tau} = 0$.

Wir schreiten nunmehr dazu, die Differentialgleichungen für die Raumkurven $1:\varrho = $ konst., $1:\tau = 0$ aufzustellen. Nach § 1 haben wir dazu die Christoffelschen Symbole Γ_{rs}^{i} nötig.

$$\Gamma_{rs}^{i} = \sum g_{ik} \Gamma_{rs,k}.$$

$$\Gamma_{rs,k} \equiv \begin{bmatrix} rs \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_k}\right). \tag{9}$$

Um jede unnötige Rechenarbeit zu ersparen, soll vorerst nur die Größenordnung der 18 verschiedenen Γ_{rs}^{i} festgestellt und dann mit allgemeinen Koeffizienten soweit gerechnet werden, wie es ohne Erschwerung der Übersicht möglich ist. Wir werden dann erfahren, daß wir nur wenige der Γ_{rs}^{i} für die Lösung der Aufgabe wirklich ausrechnen müssen.

Es soll von vornherein die in § 3, (8) getroffene Auswahl der Kurven beachtet werden. Man findet so:

$$\begin{array}{lll}
\Gamma_{11,1} = \varrho^2(A + \ldots); & \Gamma_{11,2} = \varrho(B + \ldots); & \Gamma_{11,3} = \varrho^2(C + \ldots); \\
\Gamma_{22,1} = \varrho^2(D + \ldots); & \Gamma_{22,2} = \varrho^4(E + \ldots); & \Gamma_{22,3} = \varrho^3(F + \ldots); \\
\Gamma_{33,1} = \varrho^3(G + \ldots); & \Gamma_{33,2} = \varrho(H + \ldots); & \Gamma_{33,3} = \varrho^5(J + \ldots); \\
\Gamma_{12,1} = \varrho(K + \ldots); & \Gamma_{12,2} = \varrho^2(L + \ldots); & \Gamma_{12,3} = \varrho^2(M + \ldots); \\
\Gamma_{13,1} = \varrho^2(N + \ldots); & \Gamma_{13,2} = \varrho^2(O + \ldots); & \Gamma_{13,3} = \varrho^3(P + \ldots); \\
\Gamma_{23,1} = \varrho^2(Q + \ldots); & \Gamma_{23,2} = \varrho^4(R + \ldots); & \Gamma_{23,3} = \varrho(S + \ldots).
\end{array}$$

Berechnet man daraus die Γ_{rs}^{i} gemäß

$$\Gamma_{rs}^{i} = \sum g^{ik}\,\Gamma_{rs,k},$$

so wird

$$\left\{\begin{array}{lll}
\Gamma_{11}^{1} = \varrho^2(A + \ldots); & \Gamma_{11}^{2} = \varrho(B + \ldots); & \Gamma_{11}^{3} = C + \ldots; \\
\Gamma_{22}^{1} = \varrho^2(D + \ldots); & \Gamma_{22}^{2} = \varrho^4(E + \ldots); & \Gamma_{22}^{3} = \varrho(F + \ldots); \\
\Gamma_{33}^{1} = \varrho^3(G + \ldots); & \Gamma_{33}^{2} = \varrho(H + \ldots); & \Gamma_{33}^{3} = \varrho^3(H + \ldots); \\
\Gamma_{12}^{1} = \varrho(K + \ldots); & \Gamma_{12}^{2} = \varrho^2(L + \ldots); & \Gamma_{12}^{3} = M + \ldots; \\
\Gamma_{13}^{1} = \varrho^2(N + \ldots); & \Gamma_{13}^{2} = \varrho^2(O + \ldots); & \Gamma_{13}^{3} = \varrho(P + \ldots); \\
\Gamma_{23}^{1} = \varrho^2(Q + \ldots); & \Gamma_{23}^{2} = \varrho^4(R + \ldots); & \Gamma_{23}^{3} = \frac{1}{\varrho}(S + \ldots).
\end{array}\right. \tag{10}$$

Im Koeffizienten der niedrigsten Potenz stimmen die Γ_{rs}^{i} mit den $\Gamma_{rs,i}$ überein. Die Potenz selbst ist bei den Γ_{rs}^{3} um 2 niedriger, im übrigen ebenfalls gleich.

Die Rechnung wird zeigen, daß wir von den $A, B, \ldots, S$ zur Lösung der Aufgabe nur D, G, H und O zu kennen brauchen. Diese sind:

$$\left\{\begin{aligned}
D + \ldots &= \alpha\,(\alpha_{31,31}\,s^2 + \alpha_{12,12}\,c^2 - \alpha_{31,12}\,sc) + \ldots, \\
G + \ldots &= \tfrac{3}{2}\,(\alpha_{23,31}\,c + \alpha_{23,12}\,s) + \ldots, \\
-H + \ldots &= 1 + (a + 2\alpha_{23,23})\,\varrho^2 \\
&\quad + \left(b + 2\beta_{23,23}^{(2)}\,c + 2\beta_{23,23}^{(3)}\,s - \frac{\alpha}{2}\left[\alpha_{23,31}\,c + \alpha_{31,12}\,s\right]\right)\varrho^3 + \ldots, \\
O + \ldots &= 2\,(\alpha_{23,31}\,s - \alpha_{23,12}\,c) + \ldots
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Bestimmen wir nunmehr für die Kurven

$$r = \varrho\,(1 + a(\varphi)\,\varrho^2 + b(\varphi)\,\varrho^3 + \ldots),$$
$$z = \varrho^2(\alpha(\varphi) + \beta(\varphi)\,\varrho + \ldots)$$

die Vektoren $\xi_{(r)}$ $(r = 1, 2, 3)$! Aus (5) folgt:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\varrho}\left\{1 - \left(a + \frac{1}{2}\alpha_{23,23}\right)\varrho^2 - \left(b + \frac{1}{2}\beta^{(2)}_{23.23}\,c + \frac{1}{2}\beta^{(3)}_{23,23}\,s\right)\varrho^3 + \ldots\right\}.$$

Es wird somit nach (3) und (6)

$$(12)\quad \begin{cases} \xi^1_{(1)} = \varrho\,(\alpha' + \beta'\varrho + \ldots), \\ \xi^2_{(1)} = \varrho^2(a' + b'\varrho + \ldots), \\ \xi^3_{(1)} = \dfrac{1}{\varrho}\left\{1 - \left(a + \dfrac{1}{2}\alpha_{23.23}\right)\varrho^2 - \left(b + \dfrac{1}{2}\beta^{(2)}_{23,23}\,c + \dfrac{1}{2}\beta^{(3)}_{23.23}\,s\right)\varrho^3 + \ldots\right\}; \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} \xi^1_{(2)} = \alpha'' + (\beta'' + G)\,\varrho + \ldots, \\ \xi^2_{(2)} = -\dfrac{1}{\varrho}\Big\{1 - (a + a'' - \alpha_{23,23})\,\varrho^2 - \Big(b + b'' - \beta^{(2)}_{23,23}\,c - \beta^{(3)}_{23.23}\,s \\ \qquad + \dfrac{\alpha}{2}[\alpha_{23,31}\,c + \alpha_{23,12}\,s] + 2\alpha'[\alpha_{23,31}\,s - \alpha_{23,12}\,c]\Big)\varrho^3 + \ldots\Big\}, \\ \qquad \equiv -\dfrac{1}{\varrho}\{1 - \Phi\varrho^2 - \Psi\varrho^3 + \ldots\}; \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \xi^1_{(3)} = \dfrac{1}{\varrho}\{\alpha''' + (\beta''' + G' + D)\,\varrho + \ldots\}, \\ \xi^2_{(3)} = \Phi + \ldots, \\ \xi^3_{(3)} = a'' + b''\varrho + \ldots. \end{cases}$$

Bedenkt man, daß

$$\|g_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 1 + \varrho^2(\ldots); & \varrho^2(\ldots); & \varrho^3(\ldots); \\ \varrho^2(\ldots); & 1 + \varrho^2(\ldots); & \varrho^4(\ldots); \\ \varrho^3(\ldots); & \varrho^4(\ldots); & \varrho^2(1 + \varrho^2(\ldots)) \end{Vmatrix}$$

ist so erhält man für die skalaren Produkte $(r, s) = \Sigma\, g_{ik}\,\xi^i_{(r)}\,\xi^k_{(s)}$

$$(15)\quad \begin{cases} (1, 1) = 1, \\ (1, 2) = \varrho(\ldots), \\ (1, 3) = \alpha'\alpha''' + \ldots, \\ (2, 2) = \dfrac{1}{\varrho^2}\{1 - 2\Phi\varrho^2 - 2\Psi\varrho^3 + \ldots\}, \\ (2, 3) = \dfrac{1}{\varrho}\{(\alpha''\alpha''' - \Phi') + \ldots\}, \\ (3, 3) = \dfrac{1}{\varrho^2}\{\alpha''' + (\beta''' + G' + D + \ldots)\,\varrho + \ldots\} \end{cases}$$

und damit

$$)\quad D = \begin{vmatrix} 1; & \varrho(\ldots); & \alpha'\alpha'' + \ldots; \\ \varrho(\ldots); & \frac{1}{\varrho^2}\{1 - 2\Phi\varrho^2 - 2\Psi\varrho^3 + \ldots\}; & \frac{1}{\varrho}\{(\alpha''\alpha''' - \Phi') + \ldots\}; \\ \alpha'\alpha'' + \ldots; & \frac{1}{\varrho}\{(\alpha''\alpha''' - \Phi') + \ldots\}; & \frac{1}{\varrho^2}\{\alpha''' + (\beta''' + G' + D + \ldots) + \ldots\} \end{vmatrix}$$

und nach (1)

$$(17)\quad \begin{cases} \frac{1}{\varrho} \equiv \frac{1}{\varrho}\{1 - \Phi\varrho^2 - [\Psi + \frac{1}{2}(\alpha'\alpha''')^2]\varrho^3 + \ldots\}, \\ \frac{1}{\varrho} \equiv \frac{1}{\varrho}\Big\{1 - (a + a'' - \alpha_{23,23})\varrho^2 - \Big(b + b'' - \beta^{(2)}_{23,23}c - \beta^{(3)}_{23,23}s \\ \qquad + \frac{\alpha}{2}[\alpha_{23,31}c + \alpha_{23,12}s] + 2\alpha'[\alpha_{23,31}s - \alpha_{23,12}c]\Big)\varrho^3 + \ldots\Big\}; \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} \frac{1}{\tau} \equiv 0 \equiv \{1 + \Phi\varrho^2 + \Psi\varrho^3 + \ldots\}\,[\alpha''' + (\beta''' + G' + D)\varrho + \ldots]^{\frac{1}{2}}, \\ \qquad 0 \equiv \{1 + \Phi\varrho^2 + \Psi\varrho^3 + \ldots\}\,\big[\alpha''' + (\beta''' + \frac{3}{2}[\alpha_{23,12}c - \alpha_{23,31}s] \\ \qquad\qquad + \alpha[\alpha_{31,31}s^2 + \alpha_{12,12}c^2 - \alpha_{31,12}sc])\varrho + \ldots\big]^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Diese Identitäten liefern uns die gesuchten Differentialgleichungen für $a(\varphi)$, $b(\varphi)$, $\alpha(\varphi)$ und $\beta(\varphi)$

$$(19)\qquad \mathrm{I}\begin{cases} a + a'' = \alpha_{23,23}, \\ \alpha''' = 0; \end{cases}$$

$$(20)\qquad \mathrm{II}\begin{cases} b + b'' = \beta^{(2)}_{23,23}c + \beta^{(3)}_{23,23}s + \frac{\alpha}{2}[\ldots] + 2\alpha'[\ldots], \\ \beta''' = -\frac{3}{2}(\alpha_{23,12}c - \alpha_{23,31}s) + \alpha[\ldots]. \end{cases}$$

Die Gleichungen I haben periodische Lösungen in a und α, z. B.

$$a = \alpha_{23,23}; \qquad \alpha = 0.$$

Führt man $\alpha = 0$ jetzt in II ein, so erkennt man, daß die erste der Gleichungen keine periodische Lösung mehr besitzt, wenn nicht

$$(21)\qquad \beta^{(2)}_{23,23} = 0 \quad \text{und} \quad \beta^{(3)}_{23,23} = 0$$

ist. Denn II a ist die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung bei Resonanz.

Wir haben damit, da die z-Richtung keine ausgezeichnete Richtung des Raumes war, das Resultat gefunden:

Wenn sämtliche Kurven mit konstanter Krümmung und verschwindender Windung geschlossen sein sollen, so müssen notwendig alle

$$\beta^{(i)}_{ik,ik} = 0 \quad \textit{und} \quad \beta^{(k)}_{ik,ik} = 0 \qquad (ik = 23, 31, 12)$$

sein.

§ 5.

Das Ergebnis.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß aus der Bedingung

$$\left.\begin{aligned} \beta^{(i)}_{ik,ik} &= 0 \\ \beta^{(k)}_{ik,ik} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{bei beliebiger Orientierung} \\ \text{der Koordinatenachsen,}\end{array}$$

die für die Geschlossenheit der vorgelegten Kurven als notwendig erkannt wurde, das Verschwinden sämtlicher $\beta^{(i)}_{ik,rs}$ folgt. Später wird gezeigt, daß das Verschwinden der $\beta^{(i)}_{ik,rs}$ das Verschwinden der kovarianten Ableitung des Riemannschen Krümmungstensors nach sich zieht.

Es wird jetzt vorausgesetzt:

$$\left.\begin{aligned} \beta^{(i)}_{ik,ik} &= 0 \\ \beta^{(k)}_{ik,ik} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ bei beliebiger Achsenorientierung.}$$

Dreht man das Achsenkreuz um die y_1-Achse, so daß

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1', \\ y_2 &= m y_2' - n y_3' \\ y_3 &= n y_2' + m y_3' \end{aligned} \left.\vphantom{\begin{aligned} y_2 \\ y_3 \end{aligned}}\right\} m^2 + n^2 = 1,$$

$$\begin{aligned} p_{23} &= p_{23}', \\ p_{31} &= m p_{31}' - n p_{12}', \\ p_{12} &= n p_{31}' + m p_{12}', \end{aligned}$$

so wird, wenn man diese Substitution in das Riemannsche Bogenelement einführt:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum dy_i^2 + \sum \mathfrak{P}_{ik,rs}\, p_{ik} p_{rs} \\ &= \sum dy_i'^2 + \sum \mathfrak{P}'_{ik,rs}\, p'_{ik} p'_{rs}\,; \end{aligned}$$

$\alpha'_{23,23} = \alpha_{23,23}$; $\alpha'_{31,31} = m^2 \cdot \alpha_{31,31} + mn\alpha_{31,12}$; $\alpha'_{12,12} = n^2 \alpha_{12,12} - mn\alpha_{31,12}$;

$\alpha'_{23,31} = m\alpha_{23,31} + n\alpha_{23,12}$; $\alpha'_{23,12} = m\alpha_{23,12} - n\alpha_{23,31}$;

$\alpha'_{31,12} = (m^2 - n^2)\alpha_{31,12} + 2mn(\alpha_{12,12} - \alpha_{31,31})$;

$\beta'^{(i)}_{23,23} = \beta^{(i)}_{23,23}$;

$\beta'^{(1)}_{31,31} = m^2 \beta^{(1)}_{31,31} + n^2 \beta^{(1)}_{12,12} + mn\beta^{(1)}_{31,12}$;

$$\begin{aligned} \beta'^{(1)}_{31,31} = {} & m^3 \beta^{(2)}_{31,31} + m^2 n \beta^{(3)}_{31,31} + n^2 m \beta^{(2)}_{12,12} + n^3 \beta^{(3)}_{12,12} + m^2 n \beta^{(2)}_{31,12} \\ & + m^2 n \beta^{(3)}_{31,12}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta'^{(3)}_{31,31} = {} & - m^2 n \beta^{(2)}_{31,31} + m^3 \beta^{(3)}_{31,31} - n^3 \beta^{(2)}_{12,12} + mn^2 \beta^{(3)}_{12,12} - mn^2 \beta^{(2)}_{31,12} \\ & + m^2 n \beta^{(3)}_{31,12}. \end{aligned}$$

Da nun nach Voraussetzung

$$\left.\begin{array}{l}\beta'^{(1)}_{31,31}=0\\ \beta'^{(3)}_{31,31}=0\end{array}\right\}\text{ für jedes } m, n,$$

so folgt aus den obigen Gleichungen

$$(22)\qquad \beta^{(2)}_{31,31}=0;\quad \beta^{(3)}_{12,12}=0;\quad \beta^{(1)}_{31,12}=0;\quad \beta^{(2)}_{31,12}=0;\quad \beta^{(3)}_{31,12}=0.$$

In der gleichen Weise folgt aus Drehungen um die y_2- und y_3-Achse, daß auch die übrigen $\beta^{(t)}_{ik,rs}=0$ sein müssen.

Die $\beta^{(t)}_{ik,rs}$ waren die Ableitungen der Komponenten des Krümmungstensors nach den y_t im Nullpunkt bei Zugrundelegung Riemannscher Normalkoordinaten. Wir wollen jetzt den Krümmungstensor von dieser Spezialisierung befreien. Die Koordinaten seien x_i, das Bogenelement $ds^2=\Sigma g_{ik}dx_i dx_k$ und der Krümmungstensor $R_{ik,rs}$. Wir wollen jetzt den Tensor 5. Ordnung herleiten, der die „kovariante Ableitung" („Erweiterung") von $R_{ik,rs}$ darstellt. Zu dem Zwecke nehmen wir vier beliebige kontravariante Vektoren ξ, η, ζ, ϑ und bilden die Invariante $\Sigma R_{ik,rs}\xi^i\eta^k\zeta^r\vartheta^s$. Es sollen im folgenden die Summenzeichen in der bekannten Weise fortgelassen werden. Die Summierung erfolgt stets nach den doppelt auftretenden Indizes.

Die Variation, die die Invariante $R_{ikrs}\xi^i\eta^k\zeta^r\vartheta^s$ bei einer infinitesimalen Verschiebung längs der Kurve $x_i=x_i(s)$ erfährt, ist

$$\delta R_{ikrs}\xi^i\eta^k\zeta^r\vartheta^s=\frac{\partial R_{ikrs}}{\partial x_p}\delta x_p\xi^i\eta^k\zeta^r\vartheta^s+R_{ikrs}[\delta\xi^i\cdot\eta^k\zeta^r\vartheta^s$$
$$+\xi^i\delta\eta^k\zeta^r\vartheta^s+\xi^i\eta^k\delta\zeta^r\vartheta^s+\xi^i\eta^k\zeta^r\delta\vartheta^s].$$

Setzt man noch voraus, daß während der Verschiebung die ξ, η, ζ, ϑ längs der Kurve parallel zu sich mitgenommen werden, d. h. der Bedingung genügen [3])

$$(23)\qquad \delta\xi^i=-\Gamma^i_{rs}\xi^r\delta x_s,$$

so wird, wenn man noch eine geeignete Umnennung der Indizes vornimmt,

$$\delta R_{ik,rs}\xi^i\eta^k\zeta^r\vartheta^s$$
$$=\left[\frac{\partial R_{ik,rs}}{\partial x_p}-\Gamma^q_{ip}R_{qk,rs}-\Gamma^q_{kp}R_{iq,rs}-\Gamma^q_{rp}R_{ik,qs}-\Gamma^q_{sp}R_{ik,rq}\right]\xi^i\eta^k\zeta^r\vartheta^s\delta x_p.$$

Der Tensor 5. Ordnung, der jetzt auf der rechten Seite in der Klammer steht, stellt die „kovariante Ableitung" des Krümmungstensors dar:

$$(24)\qquad R_{ik,rs;p}=\frac{\partial R_{ik,rs}}{\partial x_p}-\Gamma^q_{ip}R_{qk,rs}-\Gamma^q_{kp}R_{iq,rs}-\Gamma^q_{rp}R_{ik,qs}-\Gamma^q_{sp}R_{ik,rq}.$$

---

[3]) Siehe H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 4. Aufl., § 14, Berlin 1921.

Wählt man als Koordinaten x_i die Riemannschen Normalkoordinaten y_i, so sind im Koordinatenanfang die Γ^q_{lm} sämtlich Null.

Die $\frac{\partial R_{ik,rs}}{\partial x_p}$ sind die $\beta^{(p)}_{ik,rs}$, die nach (22) ebenfalls ausnahmslos verschwinden. Es ist somit die kovariante Ableitung des Krümmungstensors im Nullpunkt, und da dieser ein beliebiger Punkt des Raumes war, an jeder Stelle Null:

$$(25) \qquad \underline{R_{ik,rs;p} \equiv 0.}$$

Das ist also jetzt die notwendige Bedingung für die Geschlossenheit unserer „Kreise".

Für den einmal verjüngten Riemannschen Krümmungstensor R_{ik} kann man in der gleichen Weise, wie oben für $R_{ik,rs}$ geschehen ist, die kovariante Ableitung bilden. Man findet

$$(26) \qquad R_{ik,p} = \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_p} - \Gamma^q_{ip} R_{qk} - \Gamma^q_{kp} R_{iq}.$$

Aus denselben Gründen wie $R_{ik,rs,p}$ ist bei unseren Voraussetzungen

$$(27) \qquad \underline{R_{ik,p} \equiv 0.}$$

Der symmetrische Tensor R_{ik}, dessen Hauptelemente R_{ii} die Werte der Richtungsinvariante der Krümmung in den Achsenrichtungen angeben, wird durch das „Krümmungsellipsoid"

$$R_{ik} \xi^i \xi^k = 1$$

dargestellt. (Vgl. I, § 8.) In jedem Punkte des Raumes sind dann durch dieses Ellipsoid im allgemeinen drei Richtungen, die Richtungen der Hauptachsen, ausgezeichnet. Ist das Krümmungsellipsoid ein Rotationsellipsoid, so liefert es für jeden Raumpunkt nur *eine*, ist es eine Kugel, so *gar keine* ausgezeichnete Richtung. Im letzteren Falle liegt ein „Raum konstanter Krümmung" vor. (Vgl. I, § 8.)

Wir wollen nun die Annahme machen, das Krümmungsellipsoid habe drei Achsen, es gebe also in jedem Raumpunkt drei ausgezeichnete Richtungen. Wir werden sehen, daß wir dann bei gleichzeitiger Voraussetzung von (27) auf einen Widerspruch geraten. Man findet nämlich: wenn drei Achsen existieren und gleichzeitig (27) gilt, so muß notwendig die Geometrie des Raumes euklidisch sein, was der Voraussetzung widerspricht. Es muß das Ellipsoid also mindestens Rotationssymmetrie haben.

Die Achsen des Krümmungsellipsoides (28) findet man aus der Extremaleigenschaft der Achsenpunkte

$$g_{ik} \xi^i \xi^k = \text{Extr.}$$

d. h. aus den Gleichungen

$$(29)\qquad \begin{aligned}(g_{ik} - \lambda R_{ik})\xi^k &= 0,\\ R_{ik}\xi^i\xi^k &= 0.\end{aligned}$$

Aus den ersten drei Gleichungen folgt für λ

$$|g_{ik} - \lambda R_{ik}| = 0.$$

Wir wollen nun als Koordinaten wieder Riemannsche Normal-Koordinaten wählen, und die Achsen so legen, daß sie im Nullpunkt mit den Achsen des Krümmungsellipsoides zusammenfallen. Es ist dann, wenn die Glieder zweiter Ordnung in den y_i mit (y^2) bezeichnet werden, im Nullpunkt wegen (22)

$$(31)\qquad \begin{aligned}R_{ii} &= \alpha_{ii} + (y^2) + \ldots \qquad \Big(\alpha_{ii} = \sum_r \alpha_{ir,ir}\Big)\\ R_{ik} &= 0 \;\; + (y^2) + \ldots\end{aligned}$$

$$(32)\qquad \begin{aligned}g_{ii} &= 1 + (y^2) + \ldots\\ g_{ik} &= 0 + (y^2) + \ldots,\end{aligned}$$

und es wird die Gleichung (30) für λ

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11} + (y^2) + \ldots; & (y^2) + \ldots, & (y^2) + \ldots\\ (y^2) + \ldots; & 1 + \lambda\alpha_{22} + (y^2) + \ldots; & (y^2) + \ldots\\ (y^2) + \ldots; & (y^2) + \ldots; & 1 + \lambda\alpha_{33} + (y^2) + \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

$$(33)\qquad \lambda_1 = \frac{1}{\alpha_{11}} + (y^2) + \ldots;\quad \lambda_2 = \frac{1}{\alpha_{22}} + (y^2) + \ldots;\quad \lambda_3 = \frac{1}{\alpha_{33}} + (y^2) + \ldots$$

Setzt man λ_1 in (29) ein, so folgt für die erste der drei Achsen des Krümmungsellipsoides

$$\xi^1 : \xi^2 : \xi^3 = \frac{(\alpha_{11} - \alpha_{22})(\alpha_{11} - \alpha_{33})}{\alpha_{11}} + (y^2) + \ldots : 0 + (y^2) + \ldots : 0 + (y^2) + \ldots$$

und *unter der Voraussetzung*

$$(34)\qquad \begin{aligned}\alpha_{11} &\neq \alpha_{22}\\ \alpha_{11} &\neq \alpha_{33}\end{aligned}$$

$$(35)\qquad \xi^1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{11}}} + (y^2) + \ldots;\quad \xi^2 = 0 + (y^2) + \ldots;\quad \xi^3 = 0 + (y^2) + \ldots$$

Hieraus folgt, daß die Bedingung (23) für „Parallelität“

$$\delta\xi^i = \frac{\partial\xi^i}{\partial x_s}\delta x_s = -\Gamma^i_{rs}\xi^r\delta x_s$$

im Nullpunkt für jedes δx erfüllt ist

$$(36)\qquad \frac{\partial\xi^i}{\partial x_s} = -\Gamma^i_{rs}\xi^r,$$

denn im Nullpunkt verschwinden wegen (32) sämtliche Γ^i_{rs} und gemäß

(35) auch die $\frac{\partial \xi^i}{\partial x_s}$. Es ist also in der Tat die ins Auge gefaßte Achse des Krümmungsellipsoides in einem unendlich benachbarten Punkt „parallel“ zu der entsprechenden Achse im Nullpunkt, in welcher Richtung man auch fortschreitet. Und das gilt, da der Nullpunkt beliebig war, allgemein. Das durch das Ellipsoid gegebene Richtungsfeld, bzw. die drei Richtungsfelder, sind im ganzen Raum stationär. Daraus folgt nun, daß sie „integrabel“ sind. Das soll heißen, es gibt zu jedem der Richtungsfelder eine Flächenschar, die von dem Feld überall orthogonal durchsetzt wird. Oder physikalisch ausgedrückt: Das dem Richtungsfeld ξ^i kontragredient zugehörige Kraftfeld ξ_i besitzt ein Potential. Daß das zutrifft, sieht man sofort, wenn man (36) in den kovarianten Komponenten schreibt:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_s} = \Gamma^r_{is}\,\xi_r. \tag{37}$$

Daraus folgt unmittelbar das identische Verschwinden von rot ξ,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = [\Gamma^r_{ik} - \Gamma^r_{ik}]\,\xi_r \equiv 0, \tag{38}$$

also das Vorhandensein eines Potentials.

Setzt man voraus, daß die drei Achsen des Krümmungsellipsoides alle voneinander verschieden sind

$$\alpha_{11} \neq \alpha_{22} \neq \alpha_{33}, \tag{39}$$

so findet man auf diese Weise drei zueinander orthogonale Flächenscharen, die man zweckmäßig als Koordinatenflächen wählt. Diese Flächen sind voll geodätisch, d. h. sie enthalten ∞^2 geodätische Linien. Das folgt aus der Tatsache, daß bei einer Parallelverschiebung zweier Vektoren längs einer Kurve der Winkel erhalten bleibt. Verschiebt man demnach einen beliebigen Vektor, der senkrecht zur x_1-Richtung (α_{11}-Achse) steht, parallel zu sich in der eigenen Richtung, so bleibt er stets senkrecht zur x_1-Richtung. Die geodätische Linie, die er durchfährt, liegt also ganz in der Fläche $x_1 = \text{konst}$. Die Existenz dreier orthogonaler geodätischer Flächenscharen ist aber kennzeichnend für den euklidischen Raum. Das heißt für das Krümmungsellipsoid: es ist

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0;$$

und das steht mit unserer Voraussetzung (39) $\alpha_{11} \neq \alpha_{22} \neq \alpha_{33}$ im Widerspruch. Sie ist also falsch.

Es bleiben somit nur zwei Möglichkeiten. Entweder es sind zwei Achsen des Krümmungsellipsoides einander gleich, während die dritte von diesen beiden verschieden ist, oder die Achsen sind alle drei einander gleich, d. h. das Krümmungsellipsoid ist eine Kugel.

Im ersteren Falle muß das Krümmungsellipsoid in einen Kreiszylinder ausarten. Denn ebenso wie früher folgt in diesem Falle, daß die eine ausgezeichnete Richtung integrabel ist und ein Vektor dieser Richtung eindeutig in jeden Raumpunkt parallel verpflanzt werden kann. Es ist $R_{1k} = 0$ für $k = 1, 2, 3$, wenn die ausgezeichnete Richtung als x_1-Richtung gewählt wird. Wir haben einen Raum, der in einer Richtung eben, senkrecht dazu aber konstant gekrümmt ist, was aus dem als notwendig erkannten Verschwinden der kovarianten Ableitung des Krümmungstensors folgt; der Raum hat zylindrische Struktur.

Im zweiten Falle haben wir einen Raum konstanter Krümmung. Seine Geometrie ist euklidisch oder nichteuklidisch.

Mathematisches Seminar der Hamburgischen Universität, März 1921.

(Eingegangen am 3. 4. 1921.)

Über eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichheit des Kreises in der Ebene und auf der Kugeloberfläche nebst einer Anwendung auf eine Minkowskische Ungleichheit für konvexe Körper.

Von

T. Bonnesen in Kopenhagen.

Ist p der Umfang, f der Flächeninhalt einer ebenen Kurve, so besteht bekanntlich die Ungleichung

$$\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq 0,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für den Kreis gilt. Bei dem Versuch, diese Ungleichung mit elementargeometrischen Mitteln zu beweisen, gelangte ich zu folgender verschärften Ungleichung

$$\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq \frac{\pi}{4}(R - r)^2,$$

wo R den Radius des kleinsten die Kurve enthaltenden Kreises, r den Radius des größten der Kurve einschreibbaren Kreises bedeutet, und wo das Gleichheitszeichen wiederum nur für den Kreis gilt. Nach dem Beweise dieser isoperimetrischen Ungleichheit wird die analoge Ungleichheit auf der Kugel abgeleitet, und mit Hilfe der gewonnenen Resultate beweise ich dann die von Minkowski entdeckte Ungleichheit für konvexe Körper

$$\frac{k^2}{4\pi} - o \geqq 0,$$

wo o die Oberfläche und k das unten näher bezeichnete Konturintegral des Körpers bedeutet[1]).

[1]) Comptes rendus 172 (1921), S. 1087—89. — Matematisk Tidsskrift, København, 1921, S. 1—13, 48—51.

I. Die isoperimetrische Aufgabe in der Ebene.

1. Wir gehen von einem konvexen Polygon K aus, dessen Umfang und Flächeninhalt mit p und f bezeichnet werden, und konstruieren die äußere Parallelkurve $K(\varrho)$ von K im Abstande ϱ. Diese Kurve ist aus den um die Strecke ϱ verschobenen Polygonseiten und aus Kreisbogen mit Radius ϱ und Zentren in den Polygonecken zusammengesetzt. Der Umfang $p(\varrho)$ und der Flächeninhalt $f(\varrho)$ von $K(\varrho)$ sind unmittelbar durch die folgenden Formeln bestimmt

$$p(\varrho) = 2\pi\varrho + p \tag{1}$$

$$f(\varrho) = \pi\varrho^2 + \varrho p + f. \tag{2}$$

Diese Formeln lassen sich sofort auf eine beliebige konvexe Kurve übertragen. Aus (1) und (2) folgt

$$M \equiv \frac{p(\varrho)^2}{4\pi} - f(\varrho) = \frac{p^2}{4\pi} - f.$$

Der Wert von M ist folglich von ϱ unabhängig. Für $\varrho = -\frac{p}{2\pi}$ nimmt die Funktion $f(\varrho)$ ihren Minimalwert, $-M$, an, während $p(\varrho) = 0$ ist. Unsre Aufgabe ist, zu zeigen, daß M positiv ist, oder daß der Minimalwert von $f(\varrho)$ negativ ist. Es wird genügen zu zeigen, daß die Funktion $f(\varrho)$, die für positive Werte von ϱ positiv ist, überhaupt für einen negativen Wert von ϱ negativ werden kann. Wenn in (2) ϱ durch $-\varrho$ ersetzt wird, kann die Aufgabe so formuliert werden:

Ist es möglich für ein beliebiges konvexes Polygon einen positiven Wert von ϱ anzugeben, für welchen die Funktion

$$\varphi(\varrho) = \varrho p - f - \pi\varrho^2 \tag{3}$$

positiv ist?

2. In dem speziellen Fall, wo das Polygon K einem Kreis mit dem Radius r umbeschrieben ist, sieht man gleich ein, daß $\varphi(r) > 0$, weil dann $rp = 2f$ und $f > \pi r^2$ ist. Es gilt aber allgemein der

Satz 1. *Für ein beliebiges konvexes Polygon vom Umfang p und Flächeninhalt f ist*

$$\varphi(r) = rp - f - \pi r^2 > 0, \tag{4}$$

wenn r den Radius des größten im Polygon enthaltenen Kreises bedeutet.

Zur Bestimmung der Lage eines größten Innenkreises C kann man von einem Innenkreis ausgehen, welcher mindestens zwei Seiten von K berührt. Sind diese Seiten parallel, dann ist der größte Kreis schon gefunden. Zwischen den Parallelen liegen zwei Reihen von Seiten, welche bis zur Berührung mit C parallel verschoben werden können, ohne daß

der Wert von $\varphi(r)$ dabei geändert wird. Denn sowohl rp als f werden bei einer Verschiebung um die Strecke a um $2ra$ verkleinert. Der Kreis C wird von den Berührungspunkten mit dem neuen Polygon in Bogen geteilt, welche kleiner als 180^0 sind. — Wenn aber ein Innenkreis zwei nicht parallele Seiten berührt, dann gibt es einen größeren Kreis, der wenigstens noch eine Seite berührt, und die Kreisbogen zwischen den Berührungspunkten sind kleiner als 180^0. Der größte Innenkreis kann also jedenfalls immer so angebracht werden, daß er drei Seiten des Polygons tangiert.

Es sei jetzt (Fig. 1) $ABCDEFGHA$ das gegebene Polygon mit seinem größten Innenkreis. ABC sei eine Reihe von Seiten, welche den Kreis nicht berühren, L der Schnittpunkt der nächstliegenden berührenden Seiten, und $A_1B_1C_1$ seien so konstruiert, daß

$$\frac{LA}{LA_1} = \frac{LB}{LB_1} = \frac{LC}{LC_1} = m < 1.$$

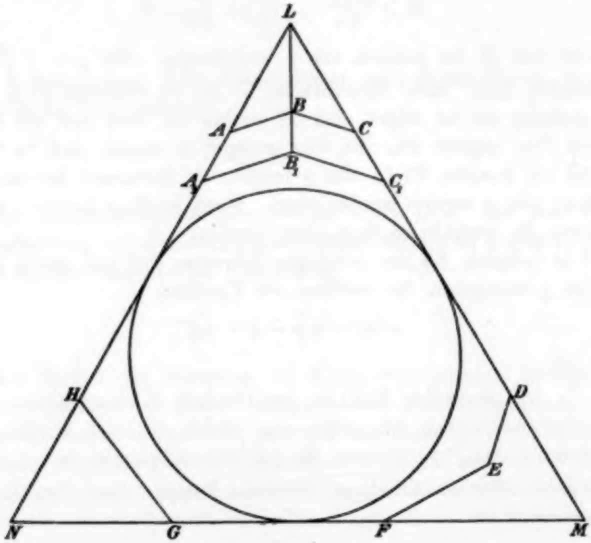

Fig. 1.

Wir vergleichen die zwei Polygone $ABCDEFGHA$ und $A_1B_1C_1DEFGHA$ und setzen

$$\varphi = rp - f - \pi r^2,$$
$$\varphi_1 = rp_1 - f_1 - \pi r^2,$$
$$\varphi - \varphi_1 = r(p - p_1) - (f - f_1).$$

Mit den Bezeichnungen $LA = a$, $LC = c$, $AB + BC = k$ und den analogen für $A_1 B_1 C_1$ ist

$$p - p_1 = (a_1 - a) + (c_1 - c) - (k_1 - k) = (1 - m)(a_1 + c_1 - k_1)$$
$$f - f_1 = (1 - m^2) t_1,$$

wo t_1 den Flächeninhalt $A_1 B_1 C_1 L A_1$ bedeutet, und somit

$$\varphi - \varphi_1 = (1 - m) r (a_1 + c_1 - k_1) - (1 - m^2) t_1.$$

Mit Hilfe der Dreiecke, welche ihre gemeinsame Spitze im Zentrum des Innenkreises haben und die Grundlinien LA_1, LC_1, $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, sieht man, daß

$$r(a_1 + c_1 - k_1) \geqq 2 t_1,$$

wo das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $A_1 B_1$ und $B_1 C_1$ den Kreis berühren. Hieraus folgt

$$\varphi - \varphi_1 \geqq (1 - m) \cdot 2 t_1 - (1 - m^2) t_1 = (1 - m)^2 t_1.$$

Wir wählen jetzt einen solchen Wert von m, daß eine oder mehrere von den Seiten $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ den Kreis tangieren, während die übrigen außerhalb des Kreises bleiben. Das gegebene Polygon ist dann durch ein neues ersetzt worden, welches eine größere Anzahl von Berührungspunkten hat und einen kleineren Wert von $\varphi(r)$ gibt. Mit diesem neuen Polygon wird eine analoge Transformation vorgenommen usw., bis man bei einem umschriebenen Polygon endet. Für dieses ist, wie wir wissen, $\varphi(r)$ positiv, und $\varphi(r)$ muß also auch für das ursprüngliche Polygon positiv sein. Der Satz 1 ist hiermit bewiesen und somit auch die isoperimetrische Ungleichheit, $M > 0$, für konvexe Polygone.

3. Es ist nun möglich einen zweiten Wert von ϱ anzugeben, für welchen $\varphi(\varrho)$ positiv ist. Es gilt nämlich der

Satz 2. *Für ein beliebiges konvexes Polygon ist*

$$\varphi(R) = Rp - f - \pi R^2 > 0 \tag{5}$$

wo R der Radius des kleinsten Kreises ist, welcher das Polygon enthält.

Man sieht leicht ein, daß ein solcher kleinster Außenkreis c entweder eine größte Seite (oder Diagonale) als Durchmesser hat oder durch drei Ecken gehen muß, welche ein spitzwinkliges Dreieck bestimmen. Die Ecken, welche innerhalb des Kreises liegen, sind also immer in Kreisabschnitten verteilt, deren Bögen höchstens 180^0 sind.

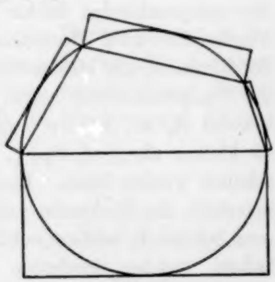

Fig. 2.

Wir betrachten zuerst den speziellen Fall, wo der kleinste Außenkreis dem Polygon umschrieben ist (Fig. 2). Über jeder Seite wird ein Rechteck so konstruiert, daß die gegenüberliegende Seite eine Tangente ist. Dann ist $Rp = 2f +$ die Rechtecke, oder $Rp - f = f +$ die Rechtecke, und weil die letztgenannte Figur den Kreis enthält, ist $Rp - f - \pi R^2 > 0$.

In dem allgemeinen Fall aber, wo das Polygon Ecken innerhalb des Kreises hat, wird der Kreis nicht ganz in der Figur enthalten sein, welche von dem Polygon und den Rechtecken zusammengesetzt ist. Es gibt dann eine Reihe von einem Kreisbogen und zwei Rechteckseiten begrenzten Sektoren, welche außerhalb des Kreises liegen (Fig. 3). Soll auch in diesem Fall $Rp - f - \pi R^2$ als positiv nachgewiesen werden, so ist zu zeigen, daß die Summe dieser Sektoren kleiner ist als die Summe derjenigen Teile der Rechtecke, die außerhalb des Kreises liegen.

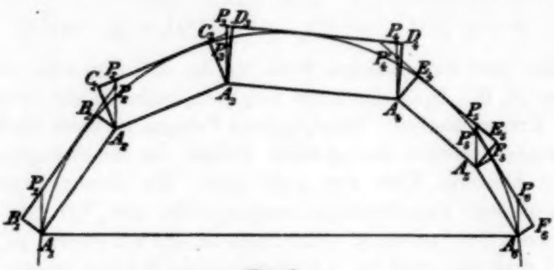

Fig. 3.

Es sei (Fig. 3) $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ ein Teil des Polygons, welcher in einem Kreisabschnitt kleiner oder gleich 180^0 enthalten ist. Durch die Ecken werden die Geraden $A_1 P_1$, $A_2 P_2' P_2, \ldots$ senkrecht auf $A_1 A_6$ gezogen. Weil die Summe der Sektorwinkel $A_2, A_3, \ldots$ gleich $\angle B_1 A_1 P_1 + \angle P_6 A_6 F_6$ ist, wird entweder eine und nur eine der Geraden AP durch den entsprechenden Sektor gehen ($A_3 P_3$ in Fig. 3), oder zwei von diesen werden mit zwei Rechteckseiten zusammenfallen. Die übrigen Geraden durchkreuzen die Rechtecke, und es ist in Fig. 3 vorausgesetzt, daß sie die Tangentenseiten selbst schneiden. Wir fangen mit dem Teil des Sektors A_3 an, welcher rechts von der Geraden $A_3 P_3$ liegt. Dieser Teil ist kleiner als $\triangle A_3 D_3 P_3$, welches in die Lage $\triangle A_4 D_4 P_4$ parallel verschoben werden kann. Ein Teil dieses Dreiecks hat die gewünschte Lage innerhalb des Rechtecks und außerhalb des Kreises. Was übrig ist, wird zum Sektor A_4 addiert, und die Summe ist in dem Dreieck $A_4 E_4 P_4'$ enthalten, welches wiederum nach $\triangle A_5 E_5 P_5$ verschoben werden kann. Dieses wird in derselben Weise geteilt, wobei man mit $\triangle A_6 F_6 P_6$ endet,

welches außerhalb des Kreises und innerhalb des letzten Rechtecks liegt. In analoger Weise behandelt man die Sektoren, welche links von $A_3 P_3$ liegen.

Wenn (Fig. 4) die Gerade $A_4 P_4$ nicht die Seite $D_3 D_4$ sondern $A_3 D_3$ schneidet, ist der Doppelsektor A_3 in einem Trapez $A_3 M_3 M_4 P_4$ enthalten,

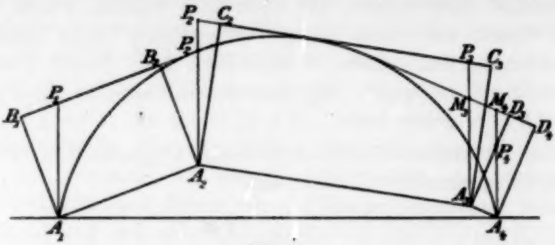

Fig. 4.

welches den nämlichen Flächeninhalt wie das Trapez $A_4 D_4 D_3 P_4$ hat, und dieses Trapez hat die gewünschte Lage. Die Ungleichheit

$$\varphi(R) = Rp - f - \pi R^2 > 0$$

ist hiermit bewiesen.

4. Aus dem gewonnenen Resultat, daß die Funktion $\varphi(\varrho) = \varrho p - f - \pi \varrho^2$ für $\varrho = r$ und $\varrho = R$ positiv ist, kann man schließen, daß $R - r$ kleiner ist als die Differenz $2\sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} - \frac{f}{\pi}}$ der Nullstellen von $\varphi(\varrho)$, was uns den Satz liefert:

Satz 3. *Zwischen dem Umfang p und dem Flächeninhalt f eines konvexen Polygons besteht die Ungleichheit*

$$\frac{p^2}{4\pi} - f > \pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2, \tag{6}$$

wo R den Radius des kleinsten Außenkreises und r den Radius des größten Innenkreises bedeuten.

Der Umfang p, der Flächeninhalt f und die Radien R und r des Außen- und Innenkreises einer beliebigen konvexen Kurve können immer als Grenzwerte der entsprechenden Größen eines umschriebenen Stützpolygons berechnet werden, und es muß deshalb für alle konvexen Kurven die folgende Relation gelten:

$$\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq \pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2. \tag{7}$$

Also gilt nur wenn $R = r$, d. h. für den Kreis, die Gleichung

$$\frac{p^2}{4\pi} - f = 0.$$

Die Relation (7) gilt auch für nicht-konvexe Kurven, welche einen bestimmten Umfang und Flächeninhalt haben, wenn R und r für die konvexe Hülle berechnet werden.

5. Aus der isoperimetrischen Maximaleigenschaft des Kreises kann man bekanntlich leicht folgern, daß unter allen Figuren, welche von einer gegebenen Strecke und einem Bogen von gegebener Länge begrenzt sind, der Kreisabschnitt den größten Flächeninhalt hat. Diesen Satz werden wir benutzen, um zu zeigen, daß das Gleichheitszeichen in (7) nur für den Kreis ($R = r$) gelten kann.

Aus den für konvexe Polygone geltenden Ungleichheiten (4) und (5) folgt für beliebige konvexe Kurven, daß

$$(8) \qquad Rp \geqq \pi R^2 + f, \qquad rp \geqq \pi r^2 + f.$$

Und weil durch (7) ausgedrückt wird, daß $R - r$ kleiner oder gleich der Differenz der Nullstellen der Funktion $\varphi(\varrho)$ ist, kann das Gleichheitszeichen in (7) nur gelten, wenn

$$Rp = \pi R^2 + f, \qquad rp = \pi r^2 + f,$$

das sagt, wenn

$$(9) \qquad p = \pi(R + r), \qquad f = \pi R r.$$

Wir werden jetzt voraussetzen, daß eine Kurve K von dieser Beschaffenheit mit nicht zusammenfallendem Außenkreis C und Innenkreis c existiere. Für eine andere Kurve K_1 mit denselben C und c und mit derselben Länge p des Umfangs ist der Flächeninhalt f_1 durch die Ungleichheit $Rp \geqq \pi R^2 + f_1$ beschränkt, d. h. $f \geqq f_1$.

Es kann gezeigt werden, daß K aus Strecken und Kreisbogen zusammengesetzt sein muß. Im entgegengesetzten Fall könnte man auf einem Bogen, welcher C und c verbindet, einen inneren Punkt Q angeben, dessen Umgebung weder gerade noch kreisförmig wäre, und weiter zwei von Q getrennte Punkte P und R so dicht an Q, daß der Kreisbogen PR, welcher dieselbe Länge wie der Bogen PQR hat, auch zwischen C und c läge. Würde der Bogen PQR durch den Kreisbogen PR ersetzt, so erhielte man statt K eine neue Kurve K_1 mit demselben Umfang, aber mit einem größeren Flächeninhalt, $f_1 > f$, und zu K_1 gehörten dieselben C und c wie zu K. Dann ist aber, wie oben nachgewiesen, $f_1 \leqq f$, was mit $f_1 > f$ im Widerspruch ist.

Es ist selbstverständlich, daß K den Kreis c berührt. Wir werden zeigen, daß K auch C berühren muß. Man sieht leicht, daß eine äußere Parallelkurve K' von K von derselben Art (9) wie K ist. Denkt man sich, daß zwei Bögen von K in einem auf C gelegenen Knickpunkt M zusammenstoßen, so würde der M entsprechende Kreisbogen auf K' mit

einem anderen Kreisbogen innerhalb des Außenkreises von K' zusammenstoßen. Das ist aber unmöglich, wie wir gesehen haben.

K muß also aus Kreisbögen bestehen, welche C und c berühren. Die innere Parallelkurve von K im Abstand r zeigt aber, daß dann K ein Vollkreis sein muß. Dieser fällt aber mit seinem Außenkreis und seinem Innenkreis zusammen. Es gibt also keine andere konvexe Kurve als den Kreis, für welche die Relationen $p = \pi(R+r)$ und $f = \pi R r$ bestehen.

6. Aus (7) erhellt, daß, wenn $p \leqq \pi(R+r)$, auch $f < \pi R r$ ist. Und wenn $f \geqq \pi R r$, ist $p > \pi(R+r)$.

Beispielsweise ist für eine Ellipse mit den Halbachsen a und b $R = a$, $r = b$, $f = \pi a b$, und aus (7) folgt deshalb, daß $p > \pi(a+b)$.

Als zweites Beispiel führen wir die Kurven konstanter Breite b an. Hier ist $R + r = b$ und $p = \pi b = \pi(R+r)$, also $f < \pi R r$.

II. Die isoperimetrische Aufgabe auf der Kugel.

7. Es soll jetzt die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf einer Kugelfläche untersucht werden, indem wir denselben Weg einschlagen wie in der Ebene. Es wird sich zeigen, daß die Verhältnisse hier viel einfacher sind. Die ganze Überlegung bezüglich der Figuren 1, 3 und 4 fällt nämlich fort und es wird nur von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß der Großkreisbogen die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte ist. Wird der Kugelradius gleich 1 gesetzt, so ist der Umfang eines sphärischen Kreises vom Radius ϱ gleich $2\pi \sin\varrho$ und der Flächeninhalt $2\pi(1-\cos\varrho)$. Die Ungleichung

$$M \equiv (2\pi - f)^2 + p^2 > (2\pi)^2 \tag{10}$$

drückt die bekannte Isoperimetrie des Kreises auf der Kugel aus, d. h. die Tatsache, daß der Kreis mit dem Umfang p einen größeren Flächeninhalt hat als jede andere Kurve desselben Umfangs p; f bedeutet den Flächeninhalt der Kurve. Bei der folgenden Untersuchung soll gezeigt werden, daß sogar

$$M \equiv (2\pi - f)^2 + p^2 > (2\pi)^2\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{R-r}{2}\right), \tag{11}$$

wo R und r die sphärischen Radien des kleinsten Außenkreises und des größten Innenkreises sind.

Wir gehen wieder von einem konvexen Polygon K aus, welches ja der Konvexität zufolge ganz auf einer Halbkugel enthalten ist. Die äußere Parallelkurve $K(\varrho)$ im Abstand ϱ ist aus Kleinkreisbögen zusammengesetzt, ist aber nicht konvex. Man braucht nur den Flächeninhalt f durch die Winkelsumme auszudrücken, um die folgenden Formeln für den Umfang $p(\varrho)$ und den Flächeninhalt $f(\varrho)$ von $K(\varrho)$ zu haben:

$$(12)\qquad 2\pi - f(\varrho) = (2\pi - f)\cos\varrho - p\sin\varrho,$$

$$(13)\qquad p(\varrho) = (2\pi - f)\sin\varrho + p\cos\varrho.$$

Es ist dabei vorausgesetzt, daß $\varrho < \frac{\pi}{2}$ ist, dann hat $K(\varrho)$ keine Doppelpunkte, und die Fläche ist nur einmal überdeckt. Die Formeln (12) und (13) übertragen sich unmittelbar auf beliebige konvexe Kurven.

Die beiden Kreise C und c haben mit K mindestens zwei Punkte gemein und werden von diesen in Bögen geteilt, welche höchstens 180° sind. Der Außenkreis $C(\varrho)$ und der Innenkreis $c(\varrho)$ von $K(\varrho)$ sind mit C bzw. c konzentrisch und haben die Radien $R + \varrho$ und $r + \varrho$. Wenn erstens $\varrho = \frac{\pi}{2} - R$ und zweitens $\varrho = \frac{\pi}{2} - r$ gesetzt wird, werden $C(\varrho)$ und $c(\varrho)$ Großkreise, welche von $K(\varrho)$ in Bögen geteilt werden, die $\leqq \pi$ sind. Der Umfang von $K(\varrho)$ ist deshalb in beiden Fällen größer als der Großkreis. Aus (13) geht also hervor, daß

$$(2\pi - f)\cos R + p\sin R > 2\pi,$$
$$(2\pi - f)\cos r + p\sin r > 2\pi.$$

Weil $\sqrt{M}$ das Maximum der Funktion $p(\varrho)$ ist, sieht man also erstens, daß $M > (2\pi)^2$, und zweitens schließt man, daß es zwei Werte $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ gibt,

$$0 < \varrho_1 < r < R < \varrho_2 < \pi,$$

für welche $p(\varrho_1) = p(\varrho_2) = 2\pi$ ist. Wir setzen

$$2\pi - f = \sqrt{M}\cos\varphi, \qquad p = \sqrt{M}\sin\varphi,$$

und ϱ_1, ϱ_2 sind dann die Wurzeln der Gleichung

$$\sqrt{M}\sin(\varrho + \varphi) = 2\pi.$$

Bezeichnen $\varrho_1 + \varphi = u$, $\varrho_2 + \varphi = \pi - u$ $(0 < u < \pi)$ die Lösungen dieser Gleichung, so ist

$$R - r < \varrho_2 - \varrho_1 = \pi - 2u,$$

$$\cos(R - r) > \cos(\varrho_2 - \varrho_1) = -\cos 2u = \frac{2(2\pi)^2}{M} - 1,$$

$$M > (2\pi)^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{R-r}{2}\right).$$

Die Ungleichheit (11) ist somit für konvexe Polygone bewiesen, und durch Grenzübergang erhält man für beliebige konvexe Kurven

$$(14)\qquad (2\pi - f)^2 + p^2 \geqq (2\pi)^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{R-r}{2}\right).$$

Für *konvexe* Kurven haben $2\pi - f$ und p beide die obere Grenze 2π, und M also die obere Grenze $2(2\pi)^2$. Die rechte Seite von (14) hat auch $2(2\pi)^2$ als obere Grenze, und zwar für $R = \frac{\pi}{2}$, $r = 0$. Wenn

K in ein sphärisches Zweieck ausartet, dessen Winkel 0 ist, nehmen sowohl die rechte als die linke Seite von (14) den Wert $2(2\pi)^2$ an, und es gelten also für konvexe Kurven die Ungleichheiten

$$(15)\qquad 2(2\pi)^2 \geqq (2\pi - f)^2 + p^2 \geqq (2\pi)^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{R-r}{2}\right).$$

Es geht hieraus hervor, daß es keine Ungleichheit von der Form (15) gibt, wo das Glied $\operatorname{tg}^2\frac{R-r}{2}$ einen größeren Koeffizienten als $(2\pi)^2$ hat.

Auf einer Kugelfläche mit Radius a nimmt (15) die Form

$$(16)\qquad 2(2\pi)^2 \geqq \left(2\pi - \frac{f}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{p}{a}\right)^2 \geqq (2\pi)^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{R-r}{2a}\right)$$

an, und man kann hieraus für $a \to \infty$ die isoperimetrische Formel (7) in der Ebene folgern.

Herr Felix Bernstein hat in einer schönen Abhandlung „Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene" (Math. Ann. 60 (1905) S. 117—136) eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichheit gefunden. Der Verfasser betrachtet auch die Parallelkurve $K(\varrho)$ auf der Kugelfläche, teilt aber ϱ einen solchen Wert zu, daß $f = 2\pi$ wird. Es wird gezeigt, daß dann $p > 2\pi$ ist, und hieraus folgt sofort die Ungleichheit (10), weil M der Transformation (12), (13) gegenüber invariant ist. Herr Bernstein leitet dann durch Betrachtungen von ganz anderer Art eine neue untere Grenze für $p(\varrho)$ ab, und findet dadurch die neue Ungleichheit

$$M > (2\pi)^2 + 8\pi \sin^2\frac{R-r}{4(1+2\pi)},$$

und diese gibt als Grenzfall für die Ebene

$$\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq \frac{1}{2(1+2\pi)^2}\cdot\left(\frac{R-r}{2}\right)^2.$$

Das Verhältnis der Koeffizienten von $\left(\frac{R-r}{2}\right)^2$ in (7) und in dieser Formel ist 320,6 : 1.

III. Eine isoperimetrische Ungleichheit im Raume.

8. Die für konvexe Kurven in der Ebene gewonnenen Resultate sollen jetzt auf einen beliebigen konvexen Körper K angewandt werden. Dem Körper sei ein Zylinder umschrieben, dessen Erzeugende eine willkürliche Richtung M im Raume haben. Der Normalschnitt des Zylinders ist eine konvexe Figur mit Umfang p und Flächeninhalt f. Ein Halbstrahl in der Richtung M schneide eine feste Kugelfläche vom Radius l in einem Punkt m, und das m entsprechende Element der Kugelfläche sei mit $d\omega$ bezeich-

net. Der Flächeninhalt o der Oberfläche von K kann durch das von Cauchy[a]) angegebene und leicht zu verifizierende Integral

$$o = \frac{1}{2\pi}\int 2 f d\omega \tag{16}$$

berechnet werden. Die Integration soll hier wie auch später überall über die ganze Einheitskugel erstreckt werden.

Wir bilden die äußere Parallelfläche von o im Abstand ϱ und projizieren diese auf dieselbe Ebene wie o. Die Projektion von o ist ein konvexer Bereich, dessen Flächeninhalt (ϱ) durch die Formel

$$f(\varrho) = \pi\varrho^2 + \varrho p + f$$

bestimmt ist. Der Inhalt $o(\varrho)$ der Parallelfläche ist dann

$$o(\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int 2 f(\varrho) d\omega = 4\pi\varrho^2 + 2\varrho k + o, \tag{17}$$

wo

$$k = \frac{1}{2\pi}\int p\, d\omega. \tag{18}$$

Wir werden k als das *Konturintegral* des Körpers bezeichnen.

Unsere Aufgabe ist zu beweisen, daß $k^2 - 4\pi o \geqq 0$, wo das Gleichheitszeichen nur für die Kugel gilt. Dieser Satz wird bewiesen sein, sobald man einen negativen Wert von ϱ angeben kann, für welchen

$$4\pi\varrho^2 + 2\varrho k + o \leqq 0,$$

oder ein positives ϱ, für welches

$$2\varrho k - o - 4\pi\varrho^2 \geqq 0.$$

Wir wissen, daß die Ungleichheit

$$\varrho p - f - \pi\varrho^2 \geqq 0 \tag{19}$$

für jede Projektion von o gilt, wenn nur $r \leqq \varrho \leqq R$, wo R und r dieselben Bedeutungen haben wie früher. Das Gleichheitszeichen ist nur gültig, wenn $R = r$ ist, d. h. wenn die Projektion des Körpers ein Kreis ist. Wir werden zeigen, daß es einen für alle Projektionen von K gemeinsamen Wert von ϱ gibt, für welchen (19) richtig ist.

K sei auf eine Ebene A projiziert in eine Figur mit dem Außenkreis C, wo C auch selbst die Kontur von K sein kann. K wird auf eine zweite Ebene A_1 mittels eines Zylinders projiziert, dessen Projektion auf A ein Parallelstreifen ist. Die Breite dieses Streifens kann höchstens gleich dem Durchmesser $2R$ von C sein, und hieraus folgt, daß der Durchmesser $2r_1$ des Innenkreises der Projektion auf A_1 auch höchstens $2R$ sein kann.

[a]) A. Cauchy, Note sur divers théorèmes relatifs à la rectification des courbes et à la quadrature des surfaces. Comptes rendus 13 (1841), S. 1060–65.

Der Innenkreis einer beliebigen Projektion von K ist also kleiner oder gleich dem Außenkreis einer beliebigen Projektion. Es sei r_M das Maximum der Radien r der Innenkreise für sämtliche Projektionen, R_m das Minimum der Radien R der Außenkreise, dann ist $r_M \leqq R_m$. Wird jetzt ein solcher Wert von ϱ gewählt, daß $r_M \leqq \varrho \leqq R_m$, dann ist für alle Projektionen

$$\varrho p - f - \pi\varrho^2 \geqq 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int 2(\varrho p - f - \pi\varrho^2)\,d\omega = 2\varrho k - o - 4\pi\varrho^2 \geqq 0.$$

Weil p und f stetige Funktionen des Punktes m sind, kann das Integral nur dann 0 sein, wenn der Integrand für alle m verschwindet, d. h. wenn jede Projektion von K ein Kreis ist. In diesem Fall aber ist K eine Kugel. Dieselbe Überlegung, die uns zu der Ungleichheit (7) führte, gibt uns hier die Ungleichheit

$$\frac{k^2}{4\pi} - o \geqq \pi(R_m - r_M)^2. \tag{20}$$

Es ist zu bemerken, daß auch, wenn der Körper keine Kugel ist, $R_m = r_M$ sein kann, was z. B. bei einem Würfel und bei einem von einer Kreiszylinderfläche und zwei Halbkugeln begrenzten Körper der Fall ist. Jedenfalls gilt aber das Gleichheitszeichen in $\frac{k^2}{4\pi} - o \geqq 0$ nur für die Kugel, und wir haben also den Satz bewiesen:

Unter allen konvexen Körpern von gleicher Oberfläche liefert die Kugel das Minimum des Konturintegrals.

Über die Bedeutung des Konturintegrals sei folgendes bemerkt. Schon Steiner hat die Parallelfläche eines konvexen Körpers untersucht[3]). Für ein Polyeder ist nach Steiner $2k$ in der Formel (17) die Summe der Produkte aus einer Kante und dem anliegenden äußeren Raumwinkel, was unmittelbar zu sehen ist. Für Körper mit stetiger Krümmung zeigt Steiner, daß k das Oberflächenintegral der mittleren Krümmung ist. In unserer Ableitung der Formel (20) sind keine Voraussetzungen über Krümmungsverhältnisse gemacht. Minkowski hat zuerst den obigen Satz ausgesprochen und zwar von dem Integral der mittleren Krümmung[4]).

Kopenhagen, den 10. Mai 1921.

---

[3]) Über parallele Flächen. Sitzber. Ak. Berlin 1840, S. 114—118.

[4]) H. Minkowski, Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 9, S. 115—121. Ges. Abh. 2, S. 122—127. Volumen und Oberfläche. Math. Ann. 57. Ges. Abh. 2, S. 230—276, besonders S. 259.

(Eingegangen am 12. 5. 1921.)

Über eine Beziehung zwischen dreidimensionalen Somenmannigfaltigkeiten und Vektorfeldern.

Von

O. Mühlendyck in Daaden (Rheinland).

Wir schicken einige Bemerkungen voraus über die dreidimensionalen Somenmannigfaltigkeiten, die Somen-M_3, wie wir zur Abkürzung sagen.

Als Koordinaten eines Somas werden acht homogene Größen α_0, α_1, α_2, α_3, β_0, β_1, β_2, β_3 gewählt[1]), die die Bedingungen erfüllen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0, \\ \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0. \end{cases}$$

Es liege eine Somen-M_3 in Parameterdarstellung vor:

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha_i = \alpha_i(u, v, w) \\ \beta_i = \beta_i(u, v, w) \end{cases} \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Die Parameter u, v, w müssen wesentlich sein in bezug auf die Verhältnisse der Somenkoordinaten. Wir betrachten eine Stelle regulären Verhaltens (u, v, w) der Somen-M_3, d. h. eine Stelle, an der die für die Verhältnisse der Somenkoordinaten gebildeten Funktionaldeterminanten nicht sämtlich verschwinden. Das zu der Stelle (u, v, w) gehörige Soma wird in ein unendlich benachbartes Soma $(u + du, v + dv, w + dw)$ durch eine Schraubung übergeführt, zu der der Drehungswinkel $2\,d\theta$, die Schiebungsgröße $2\,dH$ und die Steigung $S = \frac{dH}{d\theta}$ gehört. Für die Steigung ergibt sich der Ausdruck

$$(3) \quad S = \frac{Q_{11}\,du^2 + Q_{22}\,dv^2 + Q_{33}\,dw^2 + 2\,Q_{23}\,dv\,dw + 2\,Q_{31}\,dw\,du + 2\,Q_{12}\,du\,dv}{P_{11}\,du^2 + P_{22}\,dv^2 + P_{33}\,dw^2 + 2\,P_{23}\,dv\,dw + 2\,P_{31}\,dw\,du + 2\,P_{12}\,du\,dv},$$

---

[1]) Study, Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik, Sitzungsber. der Berl. Math. Ges. 12 (1913).

wo

$$
\begin{aligned}
P_{11} &= \sum \alpha_i^2 \sum \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial u}\right)^2 - \left(\sum \alpha_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial u}\right)^2,\\
P_{23} &= \sum \alpha_i^2 \sum \frac{\partial \alpha_i}{\partial v}\frac{\partial \alpha_i}{\partial w} - \sum \alpha_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial v} \sum \alpha_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial w},\\
Q_{11} &= \sum \alpha_i^2 \sum \frac{\partial \alpha_i}{\partial u}\frac{\partial \beta_i}{\partial u},\\
Q_{23} &= \frac{1}{2} \sum \alpha_i^2 \sum \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial v}\frac{\partial \beta_i}{\partial w} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial w}\frac{\partial \beta_i}{\partial v}\right),\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Man erhält die durch Punkte angedeuteten Ausdrücke aus den hingeschriebenen, indem man $1, 2, 3$ und gleichzeitig auch u, v, w zyklisch vertauscht.

Der Ausdruck für S an der Stelle (u, v, w) nimmt bei veränderlichem du, dv, dw im allgemeinen drei Extremwerte an. Diese werden die Hauptsteigungen der Somen M_3 an der Stelle (u, v, w) genannt. Die Summe der Hauptsteigungen werde als mittlere Steigung bezeichnet. Es ergibt sich für die mittlere Steigung M der Somen-M_3 an der Stelle (u, v, w) zunächst der Wert

$$
(4)\quad M = \frac{\begin{vmatrix} Q_{11} & P_{12} & P_{13}\\ Q_{21} & P_{22} & P_{23}\\ Q_{31} & P_{32} & P_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_{11} & Q_{12} & P_{13}\\ P_{21} & Q_{22} & P_{23}\\ P_{31} & Q_{32} & P_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & Q_{13}\\ P_{21} & P_{22} & Q_{23}\\ P_{31} & P_{32} & Q_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{21} & P_{22} & P_{23}\\ P_{31} & P_{32} & P_{33}\end{vmatrix}} \quad \begin{pmatrix} P_{kl} = P_{lk},\\ Q_{kl} = Q_{lk},\\ k, l = 1, 2, 3\end{pmatrix}.
$$

Hieraus erhält man durch Umformung den aus vierreihigen Determinanten bestehenden Ausdruck

$$
(5)\quad M = \frac{\left|\beta \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \alpha}{\partial w}\right| + \left|\alpha \frac{\partial \beta}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \alpha}{\partial w}\right| + \left|\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} \frac{\partial \alpha}{\partial w}\right| + \left|\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial w}\right|}{\left|\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \alpha}{\partial w}\right|},
$$

wo

$$
\left|\beta \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \alpha}{\partial w}\right| = \begin{vmatrix} \beta_0 & \frac{\partial \alpha_0}{\partial u} & \frac{\partial \alpha_0}{\partial v} & \frac{\partial \alpha_0}{\partial w}\\ \beta_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial w}\\ \beta_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial w}\\ \beta_3 & \frac{\partial \alpha_3}{\partial u} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial v} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial w}\end{vmatrix},
$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Für das Folgende kommen Somen-M_3 von der mittleren Steigung Null in Betracht. Darunter verstehen wir solche Somen-M_3, bei denen

die mittlere Steigung überall — von Ausnahmestellen abgesehen — den bestimmten Wert Null hat. Notwendig und hinreichend für eine solche Somen-M_3 sind folgende Bedingungen: Erstens darf $\left|\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \alpha}{\partial w}\right|$ nicht überall verschwinden, d. h. die Somen-M_3 muß aplanar[2]) sein; zweitens muß überall

$$(6) \qquad \left|\beta \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \alpha}{\partial w}\right| + \left|\alpha \frac{\partial \beta}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \alpha}{\partial w}\right| + \left|\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} \frac{\partial \alpha}{\partial w}\right| + \left|\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial w}\right| = 0$$

erfüllt sein.

Nun wenden wir uns zu den Vektorfeldern. Ein Vektor (A_1, A_2, A_3) gehe von dem Raumpunkt (x, y, z) aus. Der Vektor zusammen mit dem Raumpunkt werde als ortsgebundener Vektor bezeichnet. Eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit ortsgebundener Vektoren, bei der auch die Mannigfaltigkeit der Punkte, von denen die Vektoren ausgehen, dreidimensional ist, heißt Vektorfeld. Man pflegt ein Vektorfeld analytisch darzustellen in der Form:

$$(7) \qquad A_i = A_i(x, y, z) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Im folgenden kommen quellenfreie Vektorfelder in Frage, die bekanntlich durch

$$(8) \qquad \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = 0$$

charakterisiert sind.

Wir kommen jetzt zum Zweck der Arbeit, dem Beweis folgenden Satzes:

Man kann die Somen so auf die ortsgebundenen Vektoren abbilden, daß den dreidimensionalen Somenmannigfaltigkeiten von der mittleren Steigung Null umkehrbar-eindeutig die quellenfreien Vektorfelder zugeordnet werden.

Die Abbildung kann bewirkt werden durch folgende Gleichungen:

$$(9) \qquad \begin{cases} x = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, & A_1 = \frac{\alpha_0^2(\alpha_0 \beta_1 - \beta_0 \alpha_1)}{(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^2}, \\ y = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, & A_2 = \frac{\alpha_0^2(\alpha_0 \beta_2 - \beta_0 \alpha_2)}{(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^2}, \\ z = \frac{\alpha_3}{\alpha_0}, & A_3 = \frac{\alpha_0^2(\alpha_0 \beta_3 - \beta_0 \alpha_3)}{(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^2}. \end{cases}$$

Man sieht, daß die Gleichungen jedem Soma, das nicht der Mannigfaltigkeit $\alpha_0 = 0$ angehört, einen ortsgebundenen Vektor zuordnen.

Die Gleichungen geben uns einen Fingerzeig, welche Spezialisierung

---

[2]) Über den Begriff „aplanar“ vgl. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, S. 562.

wir in der Darstellungsform (2) einer Somen-M_3 vornehmen müssen, damit unser Beweis vereinfacht wird. Wir setzen

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha_0 = 1, \\ &\beta_i = \beta_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \end{aligned}\right. \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{10}$$

als Gleichungen einer Somen-M_3 von der mittleren Steigung Null an. Das ist zulässig, ohne daß der Beweis eingeschränkt wird, da die Somen-M_3 von der mittleren Steigung Null aplanar sind. Für (10) müssen die Kriterien einer Somen-M_3 von der mittleren Steigung Null erfüllt sein. Da die Aplanarität ohne weiteres durch die Form der Gleichungen gewährleistet ist, so bleibt nur die Bedingung (6) zu erfüllen, die die einfache Gestalt annimmt:

$$\beta_0 + \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \beta_3}{\partial \alpha_3} - \alpha_1 \frac{\partial \beta_0}{\partial \alpha_1} - \alpha_2 \frac{\partial \beta_0}{\partial \alpha_2} - \alpha_3 \frac{\partial \beta_0}{\partial \alpha_3} = 0. \tag{11}$$

Der Somen-M_3 (10) wird, wie man aus (9) ersieht, ein Vektorfeld zugeordnet, für das wir unter Berücksichtigung von (11) die Beziehung erhalten:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = \frac{\beta_0 + \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \beta_3}{\partial \alpha_3} - \alpha_1 \frac{\partial \beta_0}{\partial \alpha_1} - \alpha_2 \frac{\partial \beta_0}{\partial \alpha_2} - \alpha_3 \frac{\partial \beta_0}{\partial \alpha_3}}{(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^2} = 0,$$

d. h. das Vektorfeld ist quellenfrei. Jeder Somen-M_3 von der mittleren Steigung Null wird somit ein quellenfreies Vektorfeld zugeordnet.

Aus den Gleichungen (9) folgt

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = x, \quad \alpha_2 = y, \quad \alpha_3 = z, \\ &\beta_0 = -(1 + x^2 + y^2 + z^2)(xA_1 + yA_2 + zA_3), \\ &\beta_1 = (1 + x^2 + y^2 + z^2)[(1 + y^2 + z^2) A_1 - xyA_2 - xzA_3], \\ &\beta_2 = (1 + x^2 + y^2 + z^2)[-yxA_1 + (1 + z^2 + x^2)A_2 - yzA_3], \\ &\beta_3 = (1 + x^2 + y^2 + z^2)[-zxA_1 - zyA_2 + (1 + x^2 + y^2)A_3]. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Hieraus erkennt man, daß auf Grund unserer Abbildung jedem ortsgebundenen Vektor, der nicht von der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ ausgeht, ein Soma entspricht.

Es liege jetzt ein quellenfreies Vektorfeld vor, dargestellt in der Form (7). Dann muß die Bedingung (8) erfüllt sein. Dem Vektorfeld entspricht zufolge (12) eine Somen-M_3 und zwar eine aplanare, dargestellt mit Hilfe der Parameter x, y, z. Da die Somen-M_3 außerdem die Bedingung (6) erfüllt, was man unter Beachtung von (8) leicht bestätigt, so ist sie eine Somen-M_3 von der mittleren Steigung Null. Die Zuordnung zwischen den Somen-M_3 von der mittleren Steigung Null und den quellenfreien Vektorfeldern ist also in der Tat umkehrbar-eindeutig.

(Eingegangen am 19. 1. 1921.)

Über die Randwerte einer analytischen Funktion*).

Von

G. Szegö in Berlin.

Im Laufe meiner Untersuchungen über Toeplitzsche Formen[1]) gelangte ich zu einem Theorem, welches, mit einem wohlbekannten und vielfach gebrauchten Fatouschen Satze verbunden, einen neuen Beitrag liefert zum Verhalten der im Innern des Einheitskreises regulären analytischen Funktionen am Rande des Einheitskreises.

Fatou hat im Jahre 1906 folgenden Satz bewiesen[2]):

Es sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

eine Potenzreihe, für welche

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 + \ldots$$

konvergiert, die also für $|z| < 1$ *eine reguläre analytische Funktion darstellt. Dann existiert mit eventueller Ausnahme einer* 0-*Menge*[3]) *der Grenzwert*

$$\lim_{r=1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}),$$

und die Funktion $|f(e^{i\theta})|^2$ *ist* (*L*)[4]) *integrabel. Es gelten ferner die Formeln*

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

---

*) Vgl. die vorläufige Mitteilung in den Sitzungsberichten der Berliner Math. Ges. **20** (1921), S. 20–22; ferner F. Riesz und G. Szegö, Analytikus függvények kerületi értékeiről. Vorgelegt der ungarischen Akademie der Wissenschaften am 19. April 1920.

[1]) Vgl. G. Szegö, Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen. (Erste Mitteilung.) Math. Zeitschr. **6** (1920), S. 167–202.

[2]) P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Mathematica **30** (1906), S. 335–400. Vgl. insbesondere S. 377–379.

[3]) D. h. mit Ausnahme einer Menge, deren Lebesguesches Maß gleich 0 ist.

[4]) D. h. im Lebesgueschen Sinne.

und

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = |a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 + \ldots$$

Die Natur der Randfunktion $f(e^{i\theta})$ wurde seitdem von mehreren Autoren untersucht[5]). Ich erwähne hier nur den folgenden Satz der Herren F. und M. Riesz[6]):

Die Randfunktion $f(e^{i\theta})$ nimmt jeden komplexen Wert nur auf einer 0-Menge an (natürlich abgesehen vom Fall $f(z) \equiv$ konst.).

Der Inhalt dieses Satzes ist vollständig äquivalent damit, daß (abgesehen vom Fall $f(z) \equiv 0$) die Randfunktion $f(e^{i\theta})$ nur auf einer 0-Menge verschwindet.

In der vorliegenden Arbeit beweise ich nun das folgende Theorem:

Es sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

eine nicht identisch verschwindende Potenzreihe, für welche

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 + \ldots$$

konvergiert. Die nach dem Satz von Fatou notwendig existierende (bis auf eine 0-Menge bestimmte) Randfunktion $f(e^{i\theta})$ besitzt dann die Eigenschaft, daß die Funktion

$$\log |f(e^{i\theta})|$$

(L) integrabel ist.

Daraus folgt natürlich unmittelbar der Satz von F. und M. Riesz.

In § 1 beweise ich einen Satz, der als naturgemäße Erweiterung eines Fejérschen Satzes über trigonometrische Polynome zu betrachten ist. Darauf folgt als Anwendung in § 2 der Beweis des eben ausgesprochenen Theorems. § 3 enthält einige Bemerkungen zu den vorangehenden Untersuchungen.

---

[5]) Fatou hat bewiesen (a. a. O. [2]), S. 394–395), daß, wenn $f(z)$ für $|z| < 1$ beschränkt und nicht identisch gleich 0 ist, die Randfunktion $\lim\limits_{r=1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ nicht auf einem ganzen Bogen $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ $(0 \leqq \theta_1 < \theta_2 \leqq 2\pi)$ oder gar auf einer maßgleichen Teilmenge desselben verschwinden kann; es ist sogar nicht möglich, daß sie daselbst nur endlich viele verschiedene Werte annehme. — Carathéodory hat mit anderen Mitteln bewiesen, daß $f(e^{i\theta})$ auf jedem Bogen des Einheitskreises *drei* verschiedene Werte annimmt. Vgl. Zur Ränderzuordnung bei konformer Abbildung (Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1913, S. 509–518) S. 517. — Vgl. noch W. Groß, Über die Singularitäten analytischer Funktionen (Monatsh. für Mathematik u. Physik 29 (1918), S. 3–47) S. 41.

[6]) F. u. M. Riesz, Über die Randwerte einer analytischen Funktion. (Quatrième congrès des mathématiciens scandinaves à Stockholm 1916, S. 27–44.)

§ 1.

Über die positive Darstellung einer Klasse reeller Funktionen.

Herr Fejér hat folgendes Theorem bewiesen:

Jedes nichtnegative trigonometrische Polynom n-ter Ordnung

$$\varphi(\theta) = a_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta)$$

läßt sich in der folgenden Form darstellen:

$$\varphi(\theta) = |g_0 + g_1 z + \ldots + g_n z^n|^2_{z=e^{i\theta}}\ ^{7)}.$$

Man kann diesen Satz auch in der folgenden Form aussprechen:

$$a_\nu + i b_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{i\nu\theta} d\theta = g_0 \bar{g}_\nu + g_1 \bar{g}_{\nu+1} + \ldots + g_{n-\nu} \bar{g}_n$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, n;\ b_0 = 0)\ ^{8)},$$

und dann liefert er eine Parameterdarstellung für die Koeffizienten sämtlicher nichtnegativer trigonometrischer Polynome.

Ich will jetzt eine sich natürlich aufdrängende Erweiterung dieses Satzes behandeln. Zu diesem Zwecke führe ich folgende Ausdrucksweise ein:

Ich sage, daß eine im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ *definierte (L) integrable Funktion* $\varphi(\theta)$ *positiv dargestellt ist, wenn es eine Potenzreihe*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

gibt, für welche

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 \ldots$$

konvergiert und

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{i\nu\theta} d\theta = a_0 \bar{a}_\nu + a_1 \bar{a}_{\nu+1} + \ldots + a_n \bar{a}_{\nu+n} + \ldots$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. In Zeichen:

$$\varphi(\theta) \sim |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots|^2_{z=e^{i\theta}}.$$

(Diese Schreibweise ist berechtigt, denn im Falle, wo $f(z)$ für $|z| \leqq 1$ regulär und $\varphi(\theta) = |f(e^{i\theta})|^2$ ist, werden die Gleichungen (1) tatsächlich erfüllt.)

---

[7]) L. Fejér, Über trigonometrische Polynome. Journal für die reine und angewandte Mathematik **146** (1916), S. 53–82. Vgl. S. 54–62.

[8]) $\bar{g}$ bezeichnet die zu g konjugiert komplexe Größe.

Nun frage ich folgendes:

Was ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ definierte (L) integrable Funktion $\varphi(\theta)$ im Sinne der Gleichungen (1) positiv darstellbar sei?

Bevor ich die obige Fragestellung allgemein beantworte, schicke ich die folgende Definition voraus:

Ich verstehe unter der Klasse (K) der im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ definierten (L) integrablen Funktionen diejenigen $\varphi(\theta)$, welche

a) *fast überall*[9]) *positiv sind,*

b) *für welche* $\log \varphi(\theta)$ (L) *integrabel ist.*

Mit Hilfe dieser Benennung kann ich das folgende Theorem aussprechen:

Damit die im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ definierte nicht identisch verschwindende Funktion $\varphi(\theta)$ positiv darstellbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(\theta)$ zur Klasse (K) gehöre.

Die Gleichungen (1) liefern somit für die Fourierschen Konstanten der Funktionen der Klasse (K) ähnliche Parameterdarstellungen, wie Herr Fejér für trigonometrische Polynome gegeben hat[10]).

Ich bemerke, daß, wenn $\varphi(\theta)$ fast überall gleich 0 ist, $f(z) \equiv 0$ sein muß, weil ja in diesem Falle

$$0 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 + \ldots$$

ist. (Andererseits liefert dann $f(z) \equiv 0$ in der Tat eine positive Darstellung.) Diesen Fall können wir somit a priori ausschließen.

1. *Die Bedingung ist notwendig.* Es sei

$$\varphi(\theta) \sim |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots|^2_{z=e^{i\theta}};$$

man kann, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, voraussetzen, daß $a_0 \neq 0$ ist. Wäre nämlich a_ν der erste nicht verschwindende Koeffizient, so hätte man offenbar

$$\varphi(\theta) \sim |a_\nu + a_{\nu+1} z + \ldots + a_{\nu+n} z^n + \ldots|^2_{z=e^{i\theta}}.$$

Man sieht nun leicht ein, daß für alle Werte der Variablen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ die Gleichung gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)|x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2 d\theta \tag{2}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu x_0 + a_{\nu-1} x_1 + \ldots + a_{\nu-n} x_n|^2$$

$$(z = e^{i\theta};\ a_{-n} = 0;\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

---

[9]) D. h. mit Ausnahme einer 0-Menge.

[10]) A. a. O. [7]), S. 62–64.

(Der Koeffizient von $x_p \bar{x}_q$ ist nämlich auf der linken Seite gleich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, e^{i(p-q)\theta}\, d\theta$$

und auf der rechten Seite

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu-p}\, \bar{a}_{\nu-q}).$$

Die Hermiteschen Formen auf der linken Seite sind offenbar mit den zu $\varphi(\theta)$ gehörigen Toeplitzschen Formen identisch[11]); man hat ersichtlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,|x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2\, d\theta \geqq 0 \qquad (z = e^{i\theta})$$

(sogar > 0, wenn die Variablen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nicht durchweg verschwinden); die Funktion $\varphi(\theta)$ ist somit laut eines wohlbekannten und in der Theorie dieser Formen grundlegenden Satzes[12]) fast überall nichtnegativ.

Ich mache weiter von einem anderen Satze über Toeplitzsche Formen Gebrauch, den ich ganz allgemein zuerst in meiner Arbeit „Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen“[13]) bewiesen habe:

Es sei $\varphi(\theta)$ für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ nichtnegativ und (L) integrabel; ich bezeichne mit μ_n das Minimum der n-ten Toeplitzschen Form

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,|x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta})$$

unter der Nebenbedingung $x_0 = 1$. Dann existiert $\lim_{n=\infty} \mu_n = \mu \geqq 0$, und zwar hat man

$$\mu = \begin{cases} e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \varphi(\theta)\, d\theta}, & \textit{wenn } \varphi(\theta) \textit{ zur Klasse } (K) \textit{ gehört,} \\ 0, & \textit{im entgegengesetzten Falle.} \end{cases}$$

Wir brauchen also nichts anderes zu beweisen, als daß, sobald die Gleichungen (2) bestehen, der Grenzwert μ positiv sein muß. Nun folgt aus (2)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,|x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2\, d\theta \geqq |a_0 x_0|^2 \qquad (z = e^{i\theta}),$$

---

[11]) Vgl. etwa a. a. O. [1]), § 6.

[12]) O. Toeplitz, Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1910, S. 489–506, vgl. S. 504.

[13]) A. a. O. [1]), § 5.

also

$$\mu_n \geqq |a_0|^2$$

und

$$\mu \geqq |a_0|^2 > 0.$$

Daraus folgt, daß $\varphi(\theta)$ zur Klasse (K) gehört, w. z. b. w.

2. *Die Bedingung ist hinreichend.* Es sei $\varphi(\theta)$ eine Funktion der Klasse (K); dann ist die harmonische Funktion

$$g(\theta, r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \varphi(x) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\,dx$$

für $r < 1$ regulär und man hat nach einem Satz von Fatou[14]) fast überall

$$\lim_{r=1} g(\theta, r) = \log \varphi(\theta).$$

Es sei $g(z)$ diejenige analytische Funktion, für welche $g(0)$ reell und

$$\Re\, g(re^{i\theta}) = g(\theta, r)\ ^{15})$$

ist; es sei ferner

$$D(z) = e^{\frac{g(z)}{2}} = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

d. h.

$$D(z) = e^{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log \varphi(x) \frac{1+ze^{-ix}}{1-ze^{-ix}}\,dx}.$$

Letztere Funktion ist für $|z| < 1$ regulär und von 0 verschieden, ferner ist $D(0)$ reell und positiv. Man hat weiter

$$|D(re^{i\theta})|^2 = e^{g(\theta, r)},$$

also ist fast überall

(3) $$\lim_{r=1} |D(re^{i\theta})|^2 = \varphi(\theta).$$

Ich behaupte nun, daß

$$\varphi(\theta) \sim |D(z)|^2_{z=e^{i\theta}}$$

ist.

Zu diesem Zwecke beweise ich zunächst die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ oder, was damit gleichbedeutend ist, die Beschränktheit von

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

---

14) A. a. O. 9).

15) $\Re a$ bezeichnet den reellen Teil von a.

für $r < 1$. Man hat nach einer bekannten Ungleichung von Jensen[16])

$$|D(re^{i\theta})|^2 = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\varphi(x)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}dx} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}dx,$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D(re^{i\theta})|^2 d\theta \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx.$$

Es gilt andererseits mit Rücksicht auf (3) und auf einen wohlbekannten Hilfssatz von Fatou[17]) die Ungleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,d\theta \leqq \liminf_{r=1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

d. h.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,d\theta = \lim_{r=1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2.$$

Ich wende dieses Resultat auf die Funktion

$$\varphi^*(\theta) = \varphi(\theta)\,|1+\lambda z^\nu|^2_{z=e^{i\theta}}$$

an, wo $|\lambda| \leqq 1$, sonst aber beliebig, und $\nu > 0$ ist. Man erhält

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,|1+\lambda z^\nu|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n+\lambda a_{n-\nu}|^2$$

$$(z = e^{i\theta},\ a_{-1} = a_{-2} = \ldots = a_{-\nu} = 0),$$

woraus

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,e^{i\nu\theta}\,d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\,\bar{a}_{\nu+n}$$

folgt[18]), w. z. b. w. — Damit ist unser Theorem bewiesen.

§ 2.

Ein Satz über die Randwerte einer analytischen Funktion.

Es sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

---

[16]) J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. Acta Mathematica 30 (1906), S. 175–193. Vgl. S. 187.

[17]) A. a. O. [8]), S. 375–376.

[18]) Ist nämlich $\Re\bar{\lambda}a = 0$ für alle $|\lambda| \leqq 1$, dann ist offenbar $a = 0$.

eine Potenzreihe, für welche

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 \ldots$$

konvergent ist. Dann existiert nach Fatou fast überall

$$\lim_{r=1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}),$$

und die Funktion $|f(e^{i\theta})|^2$ ist (L) integrabel. Man hat ferner nach der Parsevalschen Formel

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = a_0 \bar{a}_\nu + a_1 \bar{a}_{\nu+1} + \ldots + a_n \bar{a}_{\nu+n} + \ldots$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)\ [19].$$

Mit Hilfe der oben eingeführten Bezeichnung können wir aber dies auch in der folgenden Form schreiben:

$$|f(e^{i\theta})|^2 \sim |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots|^2_{z=e^{i\theta}}.$$

Im Sinne unseres obigen Resultates haben wir somit die Sätze:

Abgesehen vom Falle $f(z) \equiv 0$ *ist die Funktion* $|f(e^{i\theta})|^2$ *fast überall positiv und* $\log |f(e^{i\theta})|$ (L) *integrabel,* d. h. $|f(e^{i\theta})|^2$ *gehört zur Klasse* (K).

Ferner:

Abgesehen vom Falle $f(z) \equiv$ *konst. ist die Funktion* $|f(e^{i\theta}) - c|^2$ *fast überall positiv und* $\log |f(e^{i\theta}) - c|$ (L) *integrabel, falls* c *eine beliebige Konstante bezeichnet.*

Daraus folgt unter anderem, daß *die Randfunktion* $f(e^{i\theta})$ *einen gegebenen Wert* c *nur auf einer* 0-*Menge annehmen kann, insbesondere kann sie nur auf einer* 0-*Menge verschwinden,* das ist der Satz der Herren F. und M. Riesz.

§ 3.
Bemerkungen.

Das in § 1 untersuchte Problem möchte ich noch durch einige Bemerkungen über die *Eindeutigkeit* der positiven Darstellung einer Funktion $\varphi(\theta)$ der Klasse (K) ergänzen.

1. Es sei mit den früheren Bezeichnungen

$$\varphi(\theta) \sim |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots|^2_{z=e^{i\theta}}.$$

---

[19]) A. a. O. [9]). Die Fouriersche Reihe von $f(e^{i\theta})$ stimmt nämlich mit der überein, die aus der Potenzreihe $f(z)$ durch die Substitution $z = e^{i\theta}$ formal entsteht.

Dann existiert nach Fatou fast überall

$$\lim_{r=1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} = F(\theta),$$

und es ist

$$|F(\theta)|^2 \sim |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots|^2.$$

D. h. man hat für alle n

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(\theta)|^2 e^{in\theta} d\theta,$$

woraus bekanntlich (mit Ausnahme einer 0-Menge) $\varphi(\theta) = |F(\theta)|^2$ folgt. Daraus geht hervor, daß *die Äquivalenz*

$$\varphi(\theta) \sim |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots|^2_{z=e^{i\theta}}$$

damit völlig gleichwertig ist, daß die Reihensumme $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ *konvergiert, und fast überall die Gleichung*

$$\lim_{r=1} \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}\right|^2 = \varphi(\theta)$$

besteht.

2. Ich habe in § 1 gezeigt, wie man zu einer gegebenen Funktion $\varphi(\theta)$ der Klasse (K) eine analytische Funktion $D(z)$ konstruiert, für welche

$$\varphi(\theta) \sim |D(z)|^2_{z=e^{i\theta}}$$

ist. Ich frage nun: *Durch was für eine Eigenschaft ist die dort definierte Funktion $D(z)$ unter allen analytischen Funktionen $f(z)$ ausgezeichnet, für welche*

$$\varphi(\theta) \sim |f(z)|^2_{z=e^{i\theta}}$$

ist.

Es ist a priori klar, daß solche analytische Funktionen $f(z)$ (die überdies nicht von der Form $c\,D(z)$ sind, wo $|c| = 1$ ist) wirklich existieren; in der Tat ist z. B.

$$f(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} D(z) \qquad (|z_0| < 1)$$

eine solche, da ja

$$\left|\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}\right| = 1 \qquad (|z| = 1)$$

ist. (Daraus folgt nämlich einerseits die Beschränktheit von

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})|^2 d\theta < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(r e^{i\theta})|^2 d\theta,$$

andererseits die fast überall geltende Gleichung

$$\lim_{r=1} |f(r e^{i\theta})|^2 = \varphi(\theta),$$

was nach den obigen mit

$$\varphi(\theta) \sim |f(z)|^2_{z=e^{i\theta}}$$

gleichwertig ist.) Die Antwort auf die eben gestellte Frage lautet nun folgendermaßen:

Die in § 1 definierte analytische Funktion $D(z)$ liefert die dem absoluten Betrage nach größte analytische Funktion von der verlangten Eigenschaft, d. h. wenn

$$\varphi(\theta) \sim |f(z)|^2_{z=e^{i\theta}}$$

ist, dann hat man für $|z| < 1$

(4) $$|f(z)| \leqq |D(z)|.$$

In Abschnitt 1 von § 1 habe ich nämlich bewiesen, daß, wenn

$$\varphi(\theta) \sim |f(z)|^2_{z=e^{i\theta}} \equiv |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots|^2_{z=e^{i\theta}}$$

ist, mit den dort gebrauchten Bezeichnungen die Ungleichung

$$\mu_n \geqq |a_0|^2$$

besteht, also

$$\lim_{n=\infty} \mu_n = e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log \varphi(\theta)\, d\theta} \geqq |a_0|^2.$$

Nun ist nach Abschnitt 2 von § 1

$$|D(r e^{i\theta})|^2 = e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log \varphi(u) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-\theta)+r^2} du};$$

man hat somit

$$|D(0)|^2 = e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log \varphi(u)\, du},$$

d. h.

$$|D(0)| \geqq |f(0)|.$$

Es sei nun $\alpha = r e^{i\theta_0}$ eine beliebige, aber feste Stelle im Innern des Einheitskreises, d. h. $|\alpha| = r < 1$. Ich benütze die folgende allgemeinere Form des in Abschnitt 1 des § 1 angeführten Hilfssatzes:

Es sei $\varphi(\theta)\,(L)$ integrabel für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ und $\mu_n(\alpha)$ bezeichne das Minimum der n-ten Toeplitzschen Form

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, |x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta})$$

unter der Nebenbedingung $x_0 + x_1\alpha + \ldots + x_n\alpha^n = 1$; ***dann existiert*** $\lim\limits_{n=\infty} \mu_n(\alpha) = \mu(\alpha) \geqq 0$ ***und es ist***

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} (1-r^2)\, e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\varphi(\theta) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\theta_0)+r^2}\, d\theta}, & \textit{wenn } \varphi(\theta) \textit{ zur Klasse } (K) \textit{ gehör} \\ 0, & \textit{im entgegengesetzten Falle}^{20)}, \end{cases}$$

Ich setze der Kürze halber bei festen, die Bedingung $x_0 + x_1\alpha + \ldots + x_n\alpha^n = 1$ erfüllenden $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$F(z) = f(z)(x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu x_0 + a_{\nu-1} x_1 + \ldots + a_{\nu-n} x_n) z^\nu$$

$$(a_{-1} = a_{-2} = \ldots = a_{-n} = 0),$$

dann ist

$$|F(\alpha)|^2 = |f(\alpha)|^2 \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu|^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha|^{2\nu}$$

$$= \frac{1}{1-r^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu x_0 + a_{\nu-1} x_1 + \ldots + a_{\nu-n} x_n|^2,$$

woraus nach Formel (2) des § 1

$$\mu_n(\alpha) \geqq (1-r^2)|f(\alpha)|^2$$

folgt. D. h.

$$\mu(\alpha) \geqq (1-r^2)|f(\alpha)|^2$$

und also

$$|D(\alpha)| \geqq |f(\alpha)|.$$

Damit ist die Ungleichung (4) bewiesen.

Wann kann in (4) für irgendein $z = \alpha$ ($|\alpha| < 1$) das Gleichheitszeichen gelten? Die Funktion

$$E(z) = \frac{f(z)}{D(z)}$$

ist offenbar regulär und dem absoluten Betrage nach kleiner als 1, wenn $|z| < 1$ ist. Man hat ferner fast überall

$$\lim_{r=1} |E(re^{i\theta})| = 1.$$

Es gilt also dasselbe von der Funktion

$$E^*(z) = E\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right),$$

[20]) A. a. O. [1]) § 5.

da ja die Abbildung

$$z' = \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha} z}$$

den Einheitskreis in sich überführt. Besteht also in der Ungleichung (4) für $z = \alpha$ das Gleichheitszeichen, so ist

$$E^*(z) = e_0 + e_1 z + \ldots + e_n z^n + \ldots$$

beschränkt für $|z| < 1$, ferner $|e_0| = 1$ und man hat mit Ausnahme einer 0-Menge

$$\lim_{r=1} |E^*(r e^{i\theta})| = 1.$$

Daraus folgt aber nach dem Parsevalschen Satze, daß

$$1 = |e_0|^2 + |e_1|^2 + \ldots + |e_n|^2 + \ldots,$$

d. h. $e_n = 0$ ist $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Daraus ergibt sich, daß

$$E^*(z) = \text{konst.} \quad \text{und folglich} \quad E(z) = \text{konst.}$$

sein muß, d. h. $f(z) = c\,D(z)$ $(|c| = 1)$. Schließen wir somit diesen Fall aus, so gilt in (4) für $|z| < 1$ immer das Zeichen $<$, d. h.

$$(4') \qquad |f(z)| < |D(z)|.$$

Besonders bemerkenswert ist der Spezialfall $\varphi(\theta) = 1$. Dann lautet dieses Theorem folgendermaßen:

Es sei die analytische Funktion $f(z)$ regulär für $|z| < 1$ und das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

sei beschränkt für $r < 1$; ferner sei fast überall

$$\lim_{r=1} |f(r e^{i\theta})| = 1.$$

Dann ist $|f(z)| \leqq 1$ im Innern des Einheitskreises und die Gleichheit kann hier nur dann bestehen, wenn $f(z) = c$ $(|c| = 1)$ ist.

Dieser Satz wurde von Herrn I. Schur in seiner inhaltsreichen Arbeit bewiesen: Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (Fortsetzung), (Journal für die reine und angewandte Mathematik **148** (1918), S. 122–145), S. 131–133.

3. Nachdem ich die Ergebnisse meiner Untersuchungen Herrn F. Riesz mitgeteilt habe, fügte er einige Bemerkungen und Ergänzungen hinzu, die ich hier mit seiner gütigen Erlaubnis kurz erwähnen will.

Zunächst gab er einen äußerst einfachen Beweis meines Theorems über die (L) Integrierbarkeit der Funktion $\log |f(e^{i\theta})|$, der völlig unab-

hängig ist von der Theorie der Toeplitzschen Formen und nur von gewissen elementaren Sätzen der Funktionentheorie und der Lebesgueschen Integraltheorie Gebrauch macht. Ferner zeigte er, daß ähnliche Sätze auch für die allgemeineren Funktionenklassen gelten, die sich durch die Beschränktheit der Integrale

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \qquad (r<1),$$

wo $p>0$ ist, charakterisieren lassen. Endlich gab er mit Benützung meiner Ungleichung (4) *sämtliche* analytische Funktionen an, die eine positive Darstellung für eine Funktion $\varphi(\theta)$ der Klasse (K) liefern.

(Eingegangen am 1. 2. 1921.)

Über die Summabilität von Potenzreihen auf dem Rande des Borelschen Summabilitätspolygons.

Von

Gustav Doetsch in Hannover.

---

1. Eine der von Herrn Borel[1]) für den Summenwert s einer Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ mit den Partialsummen $s_0, s_1, \ldots$ gegebenen Definitionen lautet:

Ist

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$$

eine ganze transzendente Funktion und existiert

$$\lim_{x=\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!},$$

so soll s gleich diesem Grenzwert sein. — Die Reihe heiße dann Borel-summabel oder summabel (B) zur Summe s.

2. Hieran habe ich eine *Verallgemeinerung*[2]) angeschlossen, bei der dieselben Rechengesetze wie für konvergente Reihen gelten (was bei der Borelschen Summabilität nicht der Fall ist), und die sich auf folgende *Erweiterung des Grenzwertbegriffs*[3]) stützt:

Die reelle oder komplexe Funktion $f(x)$ der reellen Variablen x sei für $x \geqq 0$ definiert und in jedem endlichen Intervall im Riemannschen

---

[1]) Borel, Fondements de la théorie des séries divergentes sommables. Journal de mathématiques pures et appliquées (5) 2 (1896), pp. 103–122 (pp. 104, 105).

[2]) Doetsch, Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheorie der divergenten Reihen. Inauguraldissertation, Göttingen 1920, 56 S.

[3]) l. c. [2]), S. 12–14; vgl. auch Doetsch, Über die Cesàrosche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrablen Funktionen. Math. Zeitschr. 11 (1921).

Sinne eigentlich integrabel. Ist k eine beliebige reelle Zahl > 0, so setze man:

$$\sigma^{(k)}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^x f(y)(x-y)^{k-1}\, dy \qquad \text{für } x \geqq 0.$$

Dann heiße die folgendermaßen definierte Funktion:

$$\mu^{(k)}(x) = \frac{\Gamma(k+1)\,\sigma^{(k)}(x)}{x^k} = k\,x^{-k} \int_0^x f(y)(x-y)^{k-1}\, dy \qquad \text{für } x > 0,$$

$$\mu^{(k)}(x) = f(0) \qquad \text{für } x = 0$$

das ***Mittel k-ter Ordnung*** oder k-te Mittel von $f(x)$.

Hat $\mu^{(k)}(x)$ für $x \to \infty$ bei festem k einen Grenzwert, so heiße $f(x)$ ***mediabel k-ter Ordnung*** und jener Grenzwert sein ***Mittelwert k-ter Ordnung*** oder sein k-ter Mittelwert. — Hat $f(x)$ selbst für $x \to \infty$ einen Grenzwert, so heiße es mediabel 0-ter Ordnung. Es sei dementsprechend

$$\sigma^{(0)}(x) = f(x), \qquad \mu^{(0)}(x) = f(x).$$

3. Nunmehr spreche ich folgende Definition[4]) aus:

Die Reihe $a_0 + a_1 + \dots$ mit den Partialsummen $s_0, s_1, \dots$ heiße Borelsummabel k-ter Ordnung ($k \geqq 0$) oder summabel (B, k) zum Summenwerte s, wenn die Funktion

$$\Phi(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$$

mediabel k-ter Ordnung ist und den Mittelwert s hat. — Die gewöhnliche Borelsche Summabilität (B) ist mit der Summabilität (B, 0) identisch.

4. Wir wollen uns nun mit der Bedeutung der (B, k)-Summabilität für die *Potenzreihen* beschäftigen.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$ habe einen von 0 verschiedenen Konvergenzradius, definiere also ein Funktionselement $f(y)$. Ist dieses über den Konvergenzkreis hinaus fortsetzbar, so ist, wie Herr Borel bewiesen hat, die Reihe $\sum_0^{\infty} c_n y^n$ summabel (B) in dem sog. *Summabilitätspolygon*, das über den Konvergenzkreis hinweggreift, mit ihm in gewissen Punkten zusammenhängt und folgendermaßen definiert ist:

Man verbinde alle singulären Punkte A der durch analytische Fortsetzung aus $f(y)$ entstehenden Funktion $F(y)$ mit dem Nullpunkt O und

---

[4]) l. c. [3]), S. 18.

errichte in A auf OA das Lot. Die Gesamtheit der Punkte, die mit O auf derselben Seite aller dieser Lote liegen, macht das Summabilitätspolygon aus.

Damit ist folgende Definition äquivalent: Ein Punkt J gehört zum Innern des Summabilitätspolygons, wenn $F(y)$ in und auf dem Kreise über OJ als Durchmesser regulär ist.

Ist R ein Randpunkt des Polygons, so geht der Kreis über OR als Durchmesser notwendig durch mindestens einen singulären Punkt A hindurch.

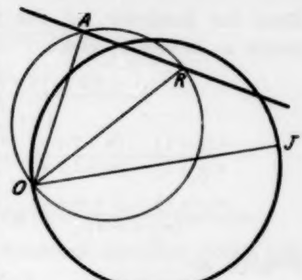

Fig. 1.

Herr Borel bewies nur, daß die Reihe im *Innern* des Summabilitätspolygons sicher summabel ist. Die Ergänzung hierzu lieferte Herr Phragmén[5]), indem er zeigte, daß die Reihe im *Äußeren* nicht summabel sein kann, daß also das Summabilitätspolygon einen *Konvergenzstern* (im Mittag-Lefflerschen Sinne) des Borelschen Ausdrucks darstellt. *Auf dem Rande* bleibt die Frage der Summabilität unentschieden.

Im Folgenden wird nun gezeigt, daß in weitreichenden Fällen die Reihe *in den Regularitätspunkten des Polygonrandes* nach der *verallgemeinerten* Borelschen Methode summierbar ist.

5. Ich beginne damit, daß ich das Summabilitätsgebiet der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} y^n = 1 + \frac{r}{1!} y + \frac{r(r+1)}{2!} y^2 + \frac{r(r+1)(r+2)}{3!} y^3 + \cdots$$

feststelle. Diese Reihe konvergiert für $|y| < 1$ und stellt die Funktion $f(y) = \frac{1}{(1-y)^r}$ dar. Ist r positiv ganzzahlig, so hat $f(y)$ den Pol $y = 1$ von der Ordnung r als einzige Singularität. Das Borelsche Polygon besteht also aus der Halbebene $\Re y < 1$.

Ich behaupte: *Die Reihe ist in jedem Punkt der Grenzgeraden* $\Re y = 1$, *abgesehen von dem Pol* $y = 1$, *summabel* (B, r).

Zum Beweise haben wir erst die Partialsummen s_n unserer Reihe zu bilden:

$$s_n = 1 + \frac{r}{1!} y + \cdots + \frac{r(r+1)\ldots(r+n-1)}{n!} y^n.$$

---

[5]) Phragmén, Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie $\int\limits_0^\infty F(ax)\, e^{-a}\, da$. Comptes rendus, 10 juin 1901.

Ist zunächst $|y| < 1$, so erhalten wir:

$$s_n = \frac{1}{(1-y)^r} - \left\{\frac{r(r+1)\dots(r+n)}{(n+1)!}\, y^{n+1} + \frac{r(r+1)\dots(r+n+1)}{(n+2)!}\, y^{n+2} + \dots\right\}.$$

Für $\alpha = 0, 1, \dots$ ist nun aber

$$\frac{r(r+1)\dots(r+n+\alpha)}{(n+1+\alpha)!}\, y^{n+1+\alpha} = \frac{1}{(r-1)!}\,\frac{d^{r-1}}{dy^{r-1}}\, y^{n+r+\alpha}.$$

Denn der Ausdruck auf der rechten Seite ist für $r > 1$ (für $r = 1$ ist nichts zu beweisen) gleich

$$\frac{(n+r+\alpha)(n+r+\alpha-1)\dots(n+\alpha+2)}{(r-1)!}\, y^{n+\alpha+1}$$

$$= \frac{r(r+1)\dots(n+1+\alpha)}{r(r+1)\dots(n+1+\alpha)}\,\frac{(n+2+\alpha)\dots(r+n+\alpha-1)(r+n+\alpha)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot(r-1)}\, y^{n+\alpha+1}$$

$$= \frac{r(r+1)\dots(r+n+\alpha)}{(n+1+\alpha)!}\, y^{n+\alpha+1}.$$

Folglich ist

$$s_n = \frac{1}{(1-y)^r} - \frac{1}{(r-1)!}\,\frac{d^{r-1}}{dy^{r-1}}\{y^{n+r} + y^{n+r+1} + \dots\}$$

$$= \frac{1}{(1-y)^r} - \frac{1}{(r-1)!}\,\frac{d^{r-1}}{dy^{r-1}}\left\{\frac{y^{n+r}}{1-y}\right\}.$$

Die rechte Seite hat nicht bloß für $|y| < 1$, sondern für alle $y \neq 1$ einen Sinn, sodaß wir damit eine Darstellung der Partialsummen für alle $y \neq 1$ gewonnen haben.

Wir bilden nun

$$\Phi(x) = e^{-x}\sum_0^\infty s_n \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{(1-y)^r} - \frac{1}{(r-1)!}\, e^{-x}\sum_0^\infty \frac{d^{r-1}}{dy^{r-1}}\left(\frac{y^{n+r}}{1-y}\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{(1-y)^r} - \frac{1}{(r-1)!}\,\frac{d^{r-1}}{dy^{r-1}}\left\{e^{-x}\frac{y^r}{1-y}\sum_0^\infty \frac{(xy)^n}{n!}\right\}$$

$$= \frac{1}{(1-y)^r} - \frac{1}{(r-1)!}\,\frac{d^{r-1}}{dy^{r-1}}\left\{\frac{y^r}{1-y}\, e^{-x(1-y)}\right\}.$$

Führt man die Differentiation nach y durch, so treten folgende Größen auf:

$$e^{-x(1-y)},\quad x e^{-x(1-y)},\quad x^2 e^{-x(1-y)},\quad \dots,\quad x^{r-1} e^{-x(1-y)},$$

die noch mit reinen Funktionen von y multipliziert und dann additiv

zusammengesetzt sind. Es ist nun leicht einzusehen, daß für $\Re y = 1$ $(y \neq 1)$, d. h.

$$y = 1 + it \qquad (t \neq 0)$$

die Funktion

$$x^\varrho e^{-x(1-y)} = x^\varrho e^{itx} \qquad (\varrho \text{ ganzzahlig} \geq 0)$$

in Bezug auf x den $\varrho + 1$-ten Mittelwert 0 besitzt. Denn durch einmalige Integration findet man zunächst

$$\int_0^x u^\varrho e^{itu} du = \left[\frac{e^{itu}}{it} u^\varrho\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{itu}}{it} \varrho u^{\varrho-1} du$$

$$= \frac{e^{itx} x^\varrho}{it} - \frac{\varrho}{it} \int_0^x u^{\varrho-1} e^{itu} du$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= e^{itx}\{c_\varrho(t) x^\varrho + c_{\varrho-1}(t) x^{\varrho-1} + \ldots + c_0(t)\}.$$

Abermalige Integration liefert wieder einen Ausdruck derselben Form, usw. Das $\varrho + 1$-fache Integral hat also die Gestalt

$$e^{itx}\{K_\varrho(t) x^\varrho + K_{\varrho-1}(t) x^{\varrho-1} + \ldots + K_0(t)\}.$$

Dies ist aber die S. 246 definierte Funktion $\sigma^{(\varrho+1)}(x)$ für $f(x) = x^\varrho e^{itx}$. Denn für ganzzahlige k ist nach einer bekannten Identität $\sigma^{(k)}(x)$ gleich dem k-fachen Integral der Funktion $f(x)$. Um $\mu^{(\varrho+1)}(x)$ zu bilden, ist $\sigma^{(\varrho+1)}(x)$ mit $\Gamma(\varrho + 2)$ zu multiplizieren und durch $x^{\varrho+1}$ zu dividieren, worauf x durch reelle Werte gegen ∞ streben soll. e^{itx} ist dauernd beschränkt, also ist

$$\mu^{(\varrho+1)}(x) = \Gamma(\varrho + 2) e^{itx} \frac{K_\varrho(t) x^\varrho + K_{\varrho-1}(t) x^{\varrho-1} + \ldots + K_0(t)}{x^{\varrho+1}} \to 0$$

für $x \to \infty$.

Demnach hat für reelles $t \neq 0$

$$\begin{array}{llllll}
e^{-x(1-y)} & \text{bei } y = 1 + it & \text{den} & 1\text{-ten} & \text{Mittelwert} & 0, \\
x e^{-x(1-y)} & \text{,, } y = 1 + it & \text{,,} & 2\text{-ten} & \text{,,} & 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x^{r-1} e^{-x(1-y)} & \text{,, } y = 1 + it & \text{,,} & r\text{-ten} & \text{,,} & 0;
\end{array}$$

mithin jeder*) dieser Ausdrücke den r-ten Mittelwert 0, folglich auch

$$\frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{dy^{r-1}} \left\{ y^r \frac{e^{-x(1-y)}}{1-y} \right\}.$$

*) l. c. *), S. 16.

Das erste Glied in dem Ausdruck für Φ, nämlich $\frac{1}{(1-y)^r}$, hat, da es in Bezug auf x konstant ist, den r-ten Mittelwert $\frac{1}{(1-y)^r}$. Folglich hat $\Phi(x)$ den r-ten Mittelwert $\frac{1}{(1-y)^r}$, d. h. unsere Reihe ist für $y = 1 + it$ $(t \neq 0)$ summabel (B, r) zur Summe $\frac{1}{(1-y)^r}$.

Analog ist die Potenzreihe (nach Potenzen von y) der Funktion $\frac{1}{(a-y)^r}$ summabel (B, r) für sämtliche Punkte auf dem Lote zur Strecke Oa im Punkte a, den Punkt a selbst ausgenommen. An Hand des obigen Beweises überzeugt man sich leicht, daß die Summabilität auf jedem abgeschlossenen (endlichen oder unendlichen) Stück, das den Punkt a nicht enthält, *gleichmäßig* ist.

6. Wir können nun folgenden allgemeinen Satz aussprechen:

Satz über die Summierbarkeit auf dem Rande des Borelschen Summabilitätspolygons.

Es sei Q ein Randpunkt des Summabilitätspolygons, der kein Eckpunkt ist, d. h. nicht auf zwei Polygonseiten zugleich liegt, und von dem auf der betreffenden Polygonseite liegenden singulären Punkt A verschieden ist. Ist letzterer ein Pol, so ist die Potenzreihe in Q summabel (B, r), wo r die Ordnung des Pols ist.

Beweis. Im Innern des Kreises über OQ als Durchmesser ist die Funktion regulär. Ich behaupte, daß sie auch auf dem Rande außer in A regulär ist. Denn läge auf der Peripherie außer A noch ein singulärer Punkt A', so müßte die zu ihm gehörige Polygonseite durch Q hindurchgehen. Q wäre also gegen die Voraussetzung ein Eckpunkt. Ich subtrahiere nun den zu A gehörigen Hauptteil von der Funktion $F(y)$, d. h. ich bestimme Konstante $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_1$ so, daß

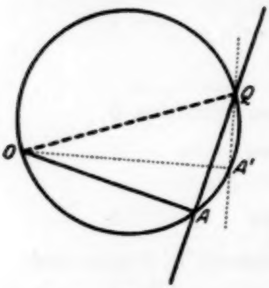

Fig. 2.

$$F(y) - \frac{A_r}{(a-y)^r} - \frac{A_{r-1}}{(a-y)^{r-1}} - \cdots - \frac{A_1}{a-y}$$

beim Punkte A $(y = a)$ regulär ist. Die restierende Potenzreihe ist regulär in und auf dem Kreise über OQ als Durchmesser, folglich in Q im ge-

wöhnlichen Borelschen Sinne summabel, d. h. summabel $(B, 0)$. Die Potenzreihen für $\frac{A_r}{(a-y)^r}, \frac{A_{r-1}}{(a-y)^{r-1}}, \ldots, \frac{A_1}{a-y}$ sind aber nach dem oben Bewiesenen auf der ganzen Geraden AQ außer in A, also speziell in Q, summabel (B, r)[7]. Also ist die $F(y)$ darstellende Reihe nach Potenzen von y in Q sicher summabel (B, r), womit unser Theorem bewiesen ist.

[7]) Siehe den Konsistenzsatz C, l. c. [4]), S. 21.

Hannover, 4. Juli 1921.

(Eingegangen am 5. Juli 1921.)

Über die Ausdehnung eines Lemmas von Fejér auf die einfach unbestimmten Integrale.

Von

W. Alexandrow in Zürich.

§ 1.

In seiner klassisch gewordenen Arbeit[1]) hat Herr Fejér ein Lemma über die „einfach unbestimmten" Reihen bewiesen, welches wichtige Anwendungen auf die Fourierschen Reihen gestattet. Es ermöglichte namentlich, gestützt auf die Theorie der „Mittelwertsummierung", den ursprünglichen natürlichen Beweis des Satzes über das „Poissonsche Integral" der Potentialtheorie (mit Hilfe des Abelschen Annäherungstheorems) aufrechtzuerhalten.

Hier soll nun die Ausdehnung des erwähnten Lemmas auf die „einfach unbestimmten" Integrale mitgeteilt werden, welche gar nicht so naheliegend ist. Sie lautet folgendermaßen:

Es sei $\varphi(\nu)$ eine im ganzen Intervalle $(0, \infty)$ beschränkte, im Endlichen nach Riemann integrierbare Funktion, und es sei das Integral

$$i_n = \int_0^n \varphi(\nu)\, d\nu$$

„einfach unbestimmt", d. h. es konvergiere mit $n \to \infty$ der Integralmittelwert

$$J_n = \frac{1}{n}\int_0^n d\mu \int_0^\mu \varphi(\nu)\, d\nu \to J \text{ [2]}).$$

[1]) Math. Ann. 58 (1904), S. 51.

[2]) Dies läßt sich bekanntlich auch mit einfachem Integral so schreiben: $J_n = \int_0^n \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)\varphi(\nu)\, d\nu$.

Es sei ferner $\psi(t)$ *eine in* $(0,\infty)$ *definierte Funktion mit zwei integrierbaren Ableitungen, die den Bedingungen*

$$\psi(0)=1, \quad \textit{und mit} \quad t\to\infty:$$

$$\psi(t)=O\left(\frac{1}{t^{1+\varrho}}\right), \quad \psi'(t)=O\left(\frac{1}{t^{1+\varrho}}\right), \quad \psi''(t)=O\left(\frac{1}{t^{2+\varrho}}\right)\ ^{3)}$$

$(\varrho>0)$ *genügt. Dann konvergiert das Integral*

$$\int_0^\infty \varphi(\nu)\psi(\nu t)\,d\nu$$

für jedes $t>0$, *und es strebt mit* $t\to 0$

$$\int_0^\infty \varphi(\nu)\psi(\nu t)\,d\nu\to J.$$

Der Beweis ergibt sich im wesentlichen durch partielle Integration, so wie jenes Fejérsche Lemma die „partielle Summation" (Abelsche Transformation) benutzt.

Es folgt vor allem aus den Voraussetzungen, daß $\psi''(t)$ im ganzen Intervall $(0,\infty)$ beschränkt, also etwa $|\psi''(t)|\leqq a$ ist, und daß etwa für $t\geqq 1$ die Ungleichung $|\psi''(t)|\leqq\frac{b}{t^{2+\varrho}}$ gilt, wo a und b positive Konstanten sind. Ferner ergibt sich durch partielle Integration unter Beachtung der Eigenschaften von $\psi(t)$

$$(1)\qquad \int_0^\infty \psi''(t)\,t\,dt=[t\psi'(t)]_0^\infty-\int_0^\infty\psi'(t)\,dt=[t\psi'(t)]_0^\infty-[\psi(t)]_0^\infty=1.$$

Die Beschränktheit von $\varphi(\nu)$ im Intervall $(0,\infty)$ zieht infolge $\psi(t)=O\left(\frac{1}{t^{1+\varrho}}\right)$ die Konvergenz von $\int_0^\infty\varphi(\nu)\psi(\nu t)\,d\nu$ für alle $t>0$ nach sich, und ferner die Beziehung

$$(2)\qquad \frac{d(nJ_n)}{dn}=i_n=\int_0^n\varphi(\nu)\,d\nu=O(n);$$

es gilt auch infolge von $J_n\to J$

$$(3)\qquad nJ_n=O(n).$$

Nun liefert die partielle Integration[4]):

$$\int_0^n\varphi(\nu)\psi(\nu t)\,d\nu=\psi(nt)\int_0^n\varphi(\nu)\,d\nu-t\int_0^n\frac{d(\nu J_\nu)}{d\nu}\,\psi'(\nu t)\,d\nu$$

$$=\psi(nt)\frac{d(nJ_n)}{dn}-t\psi'(nt)\,nJ_n+t^2\int_0^n\nu J_\nu\,\psi''(\nu t)\,d\nu,$$

[3]) Hier ist O die bekannte Landausche Bezeichnung; $y=O(x)$ heißt: $\frac{y}{x}$ beschränkt.

[4]) Diese ist hier nach dem bekannten Satze der Riemannschen Integraltheorie erlaubt (vgl. etwa Dini, Grundlagen, S. 501 (Auflage 1892)).

und auf Grund von (2) und (3) durch Grenzübergang $n \to \infty$

$$\int_0^\infty \varphi(\nu)\psi(\nu t)\,d\nu = t^2\int_0^\infty \nu J_\nu \psi''(\nu t)\,d\nu.$$

Setzen wir $J_\nu = J + \varepsilon_\nu$, wo mit $\nu \to \infty$ $\varepsilon_\nu \to 0$ strebt, so wird infolge von (1)

$$\int_0^\infty \varphi(\nu)\psi(\nu t)\,d\nu = J + t^2\int_0^\infty \varepsilon_\nu \nu \psi''(\nu t)\,d\nu,$$

und es bleibt zu beweisen, daß das letzte Integral mit $t \to 0$ gegen Null konvergiert.

Es sei bei vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ die Zahl $p > 0$ so bestimmt, daß aus $\nu > p$ $|\varepsilon_\nu| < \varepsilon$ folgt; wir zerlegen dann

$$t^2\int_0^\infty \varepsilon_\nu \nu \psi''(\nu t)\,d\nu = t^2\int_0^p \varepsilon_\nu \nu \psi''(\nu t)\,d\nu + t^2\int_p^{\frac{1}{t}} + t^2\int_{\frac{1}{t}}^\infty.$$

Für die beiden letzten Integrale gelten nun folgende Abschätzungen: wegen $|\psi''(t)| \leqq a$ ist

$$\left| t^2\int_p^{\frac{1}{t}} \varepsilon_\nu \nu \psi''(\nu t)\,d\nu \right| \leqq \varepsilon a\int_0^{\frac{1}{t}} t^2 \nu\,d\nu = \varepsilon a\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}a\varepsilon,$$

und wegen $|\psi''(t)| \leqq \frac{b}{t^{2+\varrho}}$ (für $t \geqq 1$)

$$\left| t^2\int_{\frac{1}{t}}^\infty \varepsilon_\nu \nu \psi''(\nu t)\,d\nu \right| \leqq \varepsilon b\int_{\frac{1}{t}}^\infty \frac{t^2 \nu\,d\nu}{\nu^{2+\varrho} t^{2+\varrho}} = \varepsilon b\,\frac{1}{t^\varrho}\int_{\frac{1}{t}}^\infty \frac{d\nu}{\nu^{1+\varrho}} = \frac{b}{\varrho}\,\varepsilon.$$

Die beiden Integrale können also durch Wahl von p, für alle hinreichend kleinen t, beliebig klein gemacht werden, worauf bei so gewähltem festem p das erste Integral $t^2\int_0^p \varepsilon_\nu \nu \psi''(\nu t)\,d\nu$ mit t klein wird. Damit ist die Behauptung bewiesen. Es ergibt sich aber zugleich, wie man ohne weiteres aus dem Beweise erkennt, folgender

Zusatz. *Ist $\varphi(\nu)$ eine Funktion $\varphi(\nu, x)$ von x und konvergiert der Integralmittelwert $J_n(x)$ gleichmäßig gegen eine im Endlichen beschränkte Funktion $J(x)$, so konvergiert auch mit $t \to 0$*

$$\int_0^\infty \varphi(\nu, x)\psi(\nu t)\,d\nu \quad \textit{gleichmäßig} \quad \to J(x).$$

Den für $\psi(t)$ aufgestellten Bedingungen genügen zum Beispiel die Funktionen e^{-t} und e^{-t^2}. Es konvergiert also mit $t \to 0$

$$\int_0^p \varphi(\nu) e^{-\nu t} d\nu \to J,$$

$$\int_0^p \varphi(\nu) e^{-\nu^2 t} d\nu \to J;$$

oder wenn man $e^{-t} = r < 1$ setzt, mit $r \to 1$:

$$\int_0^p \varphi(\nu) r^{\nu} d\nu \to J,$$

$$\int_0^p \varphi(\nu) r^{\nu^2} d\nu \to J.$$

Das erste Ergebnis ist den bekannten Hölderschen Sätzen über Potenzreihen[5]) analog, das zweite dem von Fejér l. c. für die Reihen bewiesenen Satze.

§ 2.

Das bewiesene Lemma erlaubt nun, wie das zitierte Lemma von Fejér, gewisse Ansätze zu rechtfertigen, die man in den Elementen der mathematischen Physik (namentlich mit Hilfe des Fourierschen Integrals) macht.

Existiert das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\alpha)| d\alpha$, so ist für $t > 0$

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^p e^{-\nu^2 t} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos \nu (x - \alpha) d\alpha$$

bekanntlich eine Lösung der linearen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Nimmt man noch an, daß $f(x)$ den Darstellbarkeitsbedingungen durch das Fouriersche Integral genügt, so folgt nach dem auf Integrale erweiterten Abelschen „Annäherungstheorem“[6]), daß mit $t \to 0$ $u(x, t)$ gegen

[5]) Math. Ann. 20 (1882), S. 535.

[6]) Es sei (für $0 < r < 1$) $0 < a(\nu, r) < 1$ bei festem r mit ν abnehmend und $\lim\limits_{r \to 1} a(\nu, r) = 1$ gleichmäßig für endliche Variationsgrenzen von ν. Ist dann $\int_h^p \varphi(\nu) d\nu$ konvergent, so ist auch $\int_h^p a(\nu, r) \varphi(\nu) d\nu$ konvergent, und es strebt mit $r \to 1$

$$\int_h^p a(\nu, r) \varphi(\nu) d\nu \to \int_h^p \varphi(\nu) d\nu.$$

Konvergiert ferner in irgendeinem Intervall $\int_h^p \varphi(\nu, x) d\nu$ gleichmäßig in x und ist $\varphi(\nu, x)$ für endliche ν beschränkt, so konvergiert gleichmäßig

$$\int_h^p a(\nu, r) \varphi(\nu, x) d\nu \to \int_h^p \varphi(\nu, x) d\nu \quad \text{mit} \quad r \to 1.$$

$f(x)$ konvergiert, und dies gleichmäßig innerhalb eines Stetigkeitsintervalls von $f(x)$, *sofern jene Darstellbarkeitsbedingungen erfüllt sind.* Nun kann man aber in der obigen Formel die Reihenfolge der Integrationen umkehren, und man erhält bekanntlich

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\, e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}}\, d\alpha,$$

eine in der Wärmeleitungstheorie als die „Poissonsche Formel" bekannte Relation; man beweist dann direkt, daß auch für jede *stetige* Funktion $f(x)$, sofern $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\alpha)|\, d\alpha$ existiert (*und unabhängig von jenen Darstellbarkeitsbedingungen*) mit $t \to 0$ $u(x,t) \to f(x)$ konvergiert, und dies gleichmäßig für endliche x. Das ist wieder eine ganz analoge Sachlage, wie in der Potentialtheorie im Falle des Satzes über das „Poissonsche Integral". Will man diesen Satz aus der ursprünglichen Reihenentwicklung beweisen, so ist man an die Darstellbarkeitsbedingungen einer Funktion durch die Fouriersche Reihe gebunden, und man hat deswegen früher nach H. A. Schwarz direkt verfahren müssen. Fejér hat aber l. c. bewiesen, daß auf Grund seiner Sätze der Satz über das Poissonsche Integral wirklich aus der ursprünglichen Reihenentwicklung folgt.

Analoges ergibt sich nun auch hier. Denn das Integral

$$\varphi(\nu, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos \nu(x-\alpha)\, d\alpha$$

ist infolge der Abschätzung $|\varphi(\nu,x)| \leqq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\alpha)|\, d\alpha$ für alle ν, x beschränkt.

Ferner gilt nach der auf Integrale erweiterten Theorie der „Mittelwertsummierung" von Fejér[7]), wenn $f(x)$ *stetig* ist,

$$J_n = \frac{1}{n}\int_0^n d\mu \int_0^\mu \varphi(\nu, x)\, d\nu = \frac{1}{n\pi}\int_0^n d\mu \int_0^\mu d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos \nu(x-\alpha)\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^n d\nu \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos \nu(x-\alpha)\, d\alpha \to f(x),$$

[7]) Vgl. z. B. M. Plancherel, Circ. Mat. Palermo **30** (1910, 2. semestre), S. 44. Die Theorie läßt sich natürlich auch mit den elementaren Begriffen der Riemannschen Integraltheorie entwickeln.

und dies gleichmäßig für endliche x. Es konvergiert somit nach dem Zusatz § 1, wenn man $\psi(t) = e^{-t^2}$ annimmt, mit $t \to 0$

$$\int_0^\infty \varphi(\nu, x) e^{-\nu^2 t} d\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu^2 t} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos \nu (x - \alpha)\, d\alpha = u(x, t) \to f(x)$$

gleichmäßig für endliche x. Obschon also zunächst für $f(x)$ die Darstellbarkeitsbedingungen durch das Fouriersche Integral angenommen werden, liegt doch der wirkliche Grund für das Verhalten von $u(x, t)$ im Falle der Stetigkeit von $f(x)$ *ebenfalls in dem ursprünglichen Ansatz* für $u(x, t)$ mit Hilfe des Fourierschen Integrals, wenn man den Satz über den Mittelwert und den Zusatz des § 1 benutzt. Ebenso genügt z. B. für $y > 0$

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu y} d y \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos \nu (x - \alpha)\, d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\, d\left(\operatorname{arctg} \frac{\alpha - x}{y}\right)$$

der Potentialgleichung und es konvergiert u mit $y \to 0$ gegen $f(x)$ gleichmäßig *für jede stetige Funktion* $f(x)$.

(Eingegangen am 28. 3. 1921.)

Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik.

Von

Erich Bessel-Hagen in Göttingen.

Bei Gelegenheit eines Kolloquiums, das Herr Geheimrat F. Klein im Wintersemester 1920 über mathematische Fragen zu den Relativitätstheorien der Physiker abhielt, äußerte er den Wunsch, es möchten doch die vor etwa zwei Jahren von Fräulein Emmy Noether aufgestellten Sätze über invariante Variationsprobleme[1]) auf die Maxwellschen Gleichungen angewandt werden. Der Inhalt dieser Sätze ist kurz gesagt der, daß aus der Invarianz eines Variationsproblems gegenüber einer kontinuierlichen Transformationsgruppe eine Anzahl von Relationen folgt, die vermöge der Differentialgleichungen des Problems identisch erfüllt sind und im Falle *einer* unabhängigen Veränderlichen erste Integrale desselben darstellen. Im Falle einer endlichen Gruppe haben diese Beziehungen die Form der von den Physikern so genannten „Erhaltungssätze".

Die Maxwellschen Gleichungen sind nun, wie allgemein bekannt, invariant gegenüber einer endlichen zehngliedrigen Gruppe, der sogenannten Lorentzgruppe, die aus den reellen „Bewegungen" des vierdimensionalen x, y, z, t-Raumes besteht, wobei der Maßbestimmung der im Unendlichen gelegene Teil des Gebildes

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

zugrunde gelegt ist. Im Jahre 1909 entdeckte aber H. Bateman[2]), daß die Maxwellschen Gleichungen gegenüber einer viel umfassenderen Gruppe

[1]) Göttinger Nachrichten 1918, S. 235 ff., im folgenden kurz zitiert mit E. Noether. Siehe auch Felix Klein, Ges. math. Abhandl. **1**, S. 585. Berlin 1921.

[2]) Proc. London Math. Soc. (2), **8**, S. 228 ff. Im gleichen und im vorhergehenden Bande dieser Zeitschr. finden sich weitere Untersuchungen von Bateman und Cunningham über die Bedeutung unserer $\mathfrak{G}_{15}$ für die Physik. Siehe auch F. Klein, Ges. math. Abhandl. **1**, S. 552.

von Transformationen invariant sind, nämlich der Gruppe aller derjenigen, welche die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 = 0$$

ungeändert lassen und den Richtungssinn der vierdimensionalen Figuren nicht umkehren[3]). Schreibt man x_1, x_2, x_3, x_4 statt x, y, z, ict, so stimmt diese Gruppe, abgesehen von der Realität der Parameter, mit der größten in der 15 gliedrigen Gruppe der Transformationen durch reziproke Radien, der sogenannten konformen Gruppe[4]) im R_4, enthaltenen Untergruppe überein. Da nun, wie schon J. L. Larmor[5]) bemerkt hat, die Maxwellschen Gleichungen aus einem Variationsproblem gewonnen werden können, und da auch dieses, wie weiter unten gezeigt wird, gegenüber der genannten $\mathfrak{G}_{15}$ invariant ist, müssen die E. Noetherschen Sätze uns fünfzehn linear unabhängige elektrodynamische Erhaltungssätze liefern. Diese wirklich aufzustellen, ist Zweck der vorliegenden Note.

Die ersten sieben von ihnen (vgl. Formeln 27 $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{a}_s$ und $\mathfrak{b}_\nu$) sind nichts anderes, als die wohlbekannten Sätze von der Erhaltung der Energie, des Impulses und des Drehimpulses[6]); ich brauche daher auf ihre Deutung nicht näher einzugehen. Die drei folgenden (27 $\mathfrak{b}_s$) bilden eine genaue Analogie zu den zweiten Schwerpunktssätzen der klassischen Mechanik und wurden für die *elektrodynamischen* Erscheinungen meines Wissens zum ersten Male von A. Einstein[7]) durch formale Integration aus den Maxwellschen Gleichungen gewonnen. Einstein behauptete a. a. O. ihre Gültigkeit nur in erster Annäherung, weil ihm damals anscheinend die Anpassung der Dynamik an die Relativitätstheorie der Lorentzgruppe noch unbekannt war. Für die *Mechanik der Kontinua* im Sinne der Relativitätstheorie hat G. Herglotz[8]) die entsprechenden Formeln aufgestellt (übrigens genau auf dem gleichen Wege, wie es hier geschieht) und auch ausdrücklich als Schwerpunktssätze gedeutet. Die fünf übrigen Formeln (27 c, $\mathfrak{d}_\nu$ und $\mathfrak{d}_s$)

---

[3]) Bateman nennt diese „spherical wave transformations".

[4]) Näheres über die konforme Gruppe zu finden in S. Lie und G. Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, 1, Kap. 10, §§ 1 und 2, S. 441 ff.

[5]) Aether and matter, Cambridge 1900, § 50, S. 88 ff. Siehe auch F. Klein, Seminarvorträge über die Entwicklung der Mathematik im neunzehnten Jahrhundert, Kap. X, B. II, § 4 (1917). (Eine Ausarbeitung dieser Vorträge ist in Abschriften bei zahlreichen mathematischen Universitätsinstituten vorhanden.)

[6]) Siehe etwa M. v. Laue, Die Relativitätstheorie 1, 4. Aufl., Braunschweig 1921, § 15 b—e.

[7]) Ann. d. Phys. (4), **20** (1906), S. 627 ff.

[8]) Ann. d. Phys. (4), **36** (1911), S. 493 ff. Vgl. insbes. die Formeln 96′ auf S. 513.

sind meines Wissens neu. Inwieweit sie den Zwecken der Physiker dienlich sein können, muß die Zukunft entscheiden.

§ 1.

Die E. Noetherschen Sätze.

Zuerst gebe ich die beiden E. Noetherschen Sätze an, und zwar in einer etwas allgemeineren Fassung als sie in der zitierten Note stehen. Ich verdanke diese einer mündlichen Mitteilung von Fräulein Emmy Noether selbst. Vorgelegt sei ein Integral

$$I_x = \int \cdots \int f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\right) dx, \tag{1}$$

erstreckt über ein beliebiges reelles Gebiet der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots$ sind hierin Abkürzungen für μ reelle Funktionen der $x_1, \ldots x_n$ und deren partielle Ableitungen*), dx steht kurz für $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$. Durch eine eindeutige und eindeutig umkehrbare Variablentransformation

$$\left\{\begin{aligned} y_i &= A_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right) \qquad [i = 1, 2, \ldots, n],\\ v_\varrho(y) &= B_\varrho\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right) \qquad [\varrho = 1, 2, \ldots, \mu] \end{aligned}\right. \tag{2}$$

und ihre Erweiterungen für die Transformation der Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \ldots$ geht (1) über in

$$I_y = \int \cdots \int \bar{f}\left(y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \ldots\right) dy,$$

wo das Integral über das dem x-Gebiet in (1) entsprechende y-Gebiet zu erstrecken ist. Ist insbesondere die Funktion $\bar{f}$ mit der Funktion f identisch, so heißt I invariant gegenüber der Transformation (2).

Wir betrachten jetzt eine kontinuierliche Gruppe von Transformationen (2) und nehmen an, daß die Parameter $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\varrho$ im Falle einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}_\varrho$, bzw. die willkürlichen Funktionen $p^{(1)}(x), p^{(2)}(x), \ldots, p^{(\varrho)}(x)$ im Falle einer unendlichen Gruppe $\mathfrak{G}_{\infty\varrho}$ so gewählt sind, daß der identischen Transformation die Werte $\varepsilon = 0$ bzw. die Funktionen $p(x) \equiv 0$, $\frac{\partial p(x)}{\partial x} \equiv 0, \ldots$ entsprechen. Dann erhalten die Transformationsformeln (2) die Gestalt

$$\left\{\begin{aligned} y_i &= x_i + \Delta x_i + \cdots \qquad [i = 1, 2, \ldots, n],\\ v_\varrho(y) &= u_\varrho + \Delta u_\varrho + \cdots \qquad [\varrho = 1, 2, \ldots, \mu], \end{aligned}\right. \tag{3}$$

und es ist erlaubt anzunehmen, daß die Δx_i, Δu_ϱ in den ε bzw. den p

*) Über die Zulässigkeit komplexer Größen vgl. E. Noether. S. 237, Fußnote 3.

und ihren Ableitungen linear sind [10]). Brechen wir die rechten Seiten in (3) mit diesen linearen Gliedern ab, so heißen die entstehenden Transformationen nach Lie bekanntlich infinitesimale. Die Invarianz des Integrals I gegenüber einer infinitesimalen Transformation bedeutet dementsprechend, daß sich $\bar{f}$ von f nur um Glieder unterscheidet, die in den ε bzw. den p, $\frac{\partial p}{\partial x}$, ... mindestens von der zweiten Ordnung sind.

Unter einer Divergenz sei ein Ausdruck der Form verstanden

$$\operatorname{Div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n},$$

wobei die A_i Funktionen der x, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, ... sind. Die Differentiationen nach den x sind total zu nehmen, d. h. indem die u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, ... als Funktionen der x betrachtet werden.

Ich nenne jetzt I gegenüber einer infinitesimalen Transformation „invariant bis auf eine Divergenz", wenn

$$(4) \qquad \bar{f} = f + \operatorname{Div} C + \text{höhere Glieder},$$

wo der Ausdruck C in den ε bzw. p, $\frac{\partial p}{\partial x}$, ... *linear* ist. Der Fall, daß C identisch Null ist, sei gelegentlich in dieser Redeweise mit einbegriffen [11]). In der Einführung dieses Begriffes liegt die am Eingang des Paragraphen erwähnte Verallgemeinerung gegenüber der ursprünglichen Veröffentlichung von Fräulein Emmy Noether.

Nunmehr können wir die E. Noetherschen Sätze aussprechen: *Ist das Integral I gegenüber den infinitesimalen Transformationen einer endlichen $\mathfrak{G}_\varrho$ bis auf eine Divergenz invariant, so werden genau ϱ linear unabhängige Verbindungen der Lagrangeschen Ausdrücke zu Divergenzen.* Man setze nämlich

$$(5) \qquad \delta u_i = v_i(x) - u_i(x) = \Delta u_i - \sum_\lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda} \Delta x_\lambda$$

und definiere $A_1, \ldots A_n$ durch die Identität

$$\sum \psi_i \delta u_i = \delta f + \operatorname{Div} A,$$

---

[10]) Vgl. E. Noether, S. 244 unten und S. 246, Anfang von § 4.

[11]) Während die vollständige Invarianz gegenüber einer infinitesimalen Transformation T die vollständige Invarianz gegenüber der eingliedrigen Gruppe, die durch T erzeugt wird, ohne weiteres nach sich zieht, ist das entsprechende bei der Invarianz bis auf eine Divergenz im allgemeinen nicht der Fall. Deshalb mußte die Definition dieses Begriffes notwendigerweise an die infinitesimalen Transformationen geknüpft werden.

in welcher die ψ_i die Lagrangeschen Ausdrücke der Funktion f bedeuten, und weiter $B_1, \ldots B_n$ durch die Gleichungen

$$B_i = C_i + A_i - f\Delta x_i. \tag{6}$$

Dann zerspalte man δu und B nach den einzelnen ε:

$$\delta u_i = \varepsilon_1 \delta^{(1)} u_i + \ldots + \varepsilon_\varrho \delta^{(\varrho)} u_i,$$

$$B_i = \varepsilon_1 B_i^{(1)} + \ldots + \varepsilon_\varrho B_i^{(\varrho)},$$

und die gesuchten Divergenzrelationen werden:

$$\sum \psi_i \delta^{(1)} u_i = \operatorname{Div} B^{(1)}, \ldots \quad \sum \psi_i \delta^{(\varrho)} u_i = \operatorname{Div} B^{(\varrho)} \tag{7}$$ [12]).

Ist umgekehrt von den Lagrangeschen Ausdrücken bekannt, daß für geeignete Funktionen δu und geeignete B genau ϱ linear unabhängige Relationen (7) bestehen, so kann man rückwärts[13]) ϱ linear unabhängige infinitesimale Transformationen herstellen, gegenüber denen I bis auf eine Divergenz invariant ist. Da die Zerspaltung von B in C und $A - f\Delta x$ auf mannigfache Weise möglich ist, lassen sich auch mannigfache Systeme von solchen infinitesimalen Transformationen angeben. Man überzeugt sich nun leicht von der Richtigkeit der Bemerkung, daß es dann und nur dann möglich ist, die genannte Zerfällung so vorzunehmen, daß die resultierenden Transformationen von den $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots$ frei sind, wenn die Funktionen δu von den $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \ldots$ frei sind und von den $\frac{\partial u}{\partial x}$ entweder gleichfalls frei sind oder in sehr spezieller Weise linear abhängen[14]). Wenn diese Bedingung erfüllt ist, läßt sich beweisen, daß die ϱ infinitesimalen Transformationen, zu denen man gelangt, genau eine ϱ-gliedrige Gruppe erzeugen.

Zum Zwecke der späteren Anwendung notiere ich noch den Ausdruck für die B_i im Falle, daß f nur von den ersten Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ abhängt:

$$B_i = C_i - \sum_k \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_k}{\partial x_i}} \Delta u_k + \sum_\lambda \Delta x_\lambda \left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_k}{\partial x_i}} \frac{\partial u_k}{\partial x_\lambda} - \delta_{\lambda i} f \right) \tag{8}$$

$$\delta_{\lambda i} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \lambda \neq i, \\ 1, & \text{wenn } \lambda = i. \end{cases}$$

---

[12]) Vgl. E. Noether, § 2, S. 242.

[13]) Wie bei E. Noether, § 3, ausgeführt.

[14]) Nämlich

$$\delta u_i = \alpha_i(x, u) + \sum_\lambda \beta_\lambda(x, u) \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda}.$$

Dann läßt sich erreichen:

$$\Delta x_i = -\beta_i(x, u), \qquad \Delta u_i = \alpha_i(x, u), \qquad C_i = \frac{A_i - B_i}{f} + \beta_i(x, u).$$

Der zweite Satz bezieht sich auf eine unendliche kontinuierliche Gruppe $\mathfrak{G}_{\infty \varrho}$ und besagt, *daß die Invarianz von I bis auf eine Divergenz gegenüber den infinitesimalen Transformationen der $\mathfrak{G}_{\infty \varrho}$ ϱ linear unabhängige Abhängigkeiten zwischen den ψ_i und ihren totalen Ableitungen nach den x zur Folge hat, und daß umgekehrt das Bestehen ϱ solcher linear unabhängiger Abhängigkeiten die Invarianz von I bis auf eine Divergenz gegenüber gewissen ϱ infinitesimalen Transformationen mit ϱ willkürlichen Funktionen nach sich zieht.* Um die genannten Abhängigkeiten aufzustellen, schreibe man Gleichung (5) in entwickelter Form auf:

$$(9) \qquad \delta u_i = \sum_{\lambda=1}^{\varrho} \left\{ a_i^{(\lambda)}(x, u, \ldots)\, p^{(\lambda)}(x) + b_i^{(\lambda)}(x, u, \ldots) \frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial x} + \ldots \right.$$
$$\left. + c_i^{(\lambda)}(x, u, \ldots) \frac{\partial^\sigma p^{(\lambda)}}{\partial x^\sigma} \right\}.$$

Dann lauten die Abhängigkeiten einfach:

$$(10) \qquad \sum_i \left\{ (a_i^{(\lambda)} \psi_i) - \frac{\partial}{\partial x}(b_i^{(\lambda)} \psi_i) + \ldots + (-1)^\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma}(c_i^{(\lambda)} \psi_i) \right\} = 0$$
$$[\lambda = 1, 2, \ldots, \varrho]$$ [15]).

§ 2.

Anwendung auf das n-Körperproblem.

Ein erstes Beispiel für die bequeme Anwendbarkeit der E. Noetherschen Sätze bietet die Herleitung der bekannten zehn Integrale des n-Körperproblems. Obwohl der zugrunde liegende Gedanke wie auch die Ausführung im einzelnen nicht neu sein dürften [16]), führe ich die kurze Rechnung vollständig durch um der formalen Analogie mit den nachher aufzustellenden elektrodynamischen Erhaltungssätzen willen. Die Differentialgleichungen des n-Körperproblems ergeben sich aus dem Variationsproblem

$$\delta \int L\, dt = 0,$$

[15]) E. Noether. § 2, S. 243.

[16]) Auch mit Lieschen Methoden, jedoch ohne Ausnützung des vorteilhaften Umstandes, daß die Differentialgleichungen aus einem Variationsproblem entspringen, behandelt diese Frage F. Engel, Gött. Nachr. 1916, S. 270 ff. — Der Vergleich dürfte den Vorzug des Variationsansatzes deutlich zum Ausdruck bringen. — Für die geschichtliche Entwicklung der Einsicht in die Bedeutung und den Zusammenhang der zehn Integrale der Bewegungsgleichungen vergleiche man die betreffenden Stellen in Jacobis Vorlesungen über Dynamik; ferner die interessante Note von J. R. Schütz in den Gött. Nachr. 1897, S. 110 ff., sowie die zusammenfassende Darstellung von F. Klein in „Die Entwicklung der Mathematik im neunzehnten Jahrhundert", Kap. 10, A § 2 und C § 4. 1917.

wo die Querstriche andeuten mögen, daß bei festen Grenzen zu variieren ist. Hierin hat die Lagrangesche Funktion L die folgende Bedeutung:

$$L = T - U,$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_{i1}^2 + \dot{x}_{i2}^2 + \dot{x}_{i3}^2),$$

$$U = -\sum \frac{\varkappa\, m_i m_k}{r_{ik}}, \qquad 1 \leqq i < k \leqq n,$$

$$r_{ik} = \sqrt{(x_{i1} - x_{k1})^2 + (x_{i2} - x_{k2})^2 + (x_{i3} - x_{k3})^2},$$

$$\varkappa = \text{Gravitationskonstante},$$

und die x_{ik} sind aus dem Variationsproblem als Funktionen von t zu bestimmen. Es handelt sich hier also um ein *einfaches* Integral, t tritt an die Stelle der vorhin mit x und die x_{ik} treten an die Stelle der vorhin mit u bezeichneten Größen.

Bekanntlich sind die Bewegungsgleichungen des n-Körperproblems gegenüber einer endlichen zehngliedrigen Gruppe, der sogenannten „Galilei-Newtongruppe" invariant. An dem Variationsproblem zeigt sich diese Invarianz in der Weise, daß L gegenüber den infinitesimalen Transformationen der Gruppe zum Teil vollständig, zum Teil bis auf eine Divergenz invariant ist. Diese lauten nämlich:

$$(11)\qquad \begin{array}{llll} \text{a)} & \Delta t = \tau, & \Delta x_{ik} = 0, & \\ \text{b)} & \Delta t = 0, & \Delta x_{ik} = \alpha_k, & \\ \text{c)} & \Delta t = 0, & \Delta x_{ik} = \sum\limits_{\varrho=1}^{3} \beta_{k\varrho} x_{i\varrho} & \left(\begin{array}{l}\beta_{kk} = 0 \\ \beta_{k\varrho} = -\beta_{\varrho k}\end{array}\right), \\ \text{d)} & \Delta t = 0, & \Delta x_{ik} = \gamma_k t & [k = 1, 2, 3], \end{array}$$

und man sieht ohne Mühe, daß bei a), b), c) $\Delta L = 0$ ist, dagegen ist bei d)

$$\Delta L = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{3} m_i \gamma_k x_{ik}\Big) = \frac{d}{dt} C = \operatorname{Div} C.$$

Nunmehr ergeben die Formeln (5) und (8)

$$\delta x_{ik} = \Delta x_{ik} - \dot{x}_{ik}\Delta t,$$

$$B = C - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{3} m_i \dot{x}_{ik}\Delta x_{ik} + \Delta t(T + U),$$

und die E. Noetherschen Divergenzrelationen nehmen die Form an:

$$(12)\quad \text{a)}\quad -\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{3}\dot{x}_{ik}\psi_{ik} = \frac{d}{dt}(T+U),$$

$$\text{b)}\quad \sum_{i=1}^{n}\psi_{ik} = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{x}_{ik} \qquad [k=1,2,3],$$

$$\text{c)}\quad \sum_{i=1}^{n}(x_{i\mu}\psi_{i\nu}-x_{i\nu}\psi_{i\mu}) = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}m_i(x_{i\mu}\dot{x}_{i\nu}-x_{i\nu}\dot{x}_{i\mu})$$

$$[(\mu,\nu)=(2,3),(3,1),(1,2)],$$

$$\text{d)}\quad \sum_{i=1}^{n}t\psi_{ik} = \frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n}m_i x_{ik} - t\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{x}_{ik}\right\} \quad [k=1,2,3].$$

Soweit handelte es sich um rein *formale* Identitäten, die sich übrigens nachträglich leicht direkt verifizieren lassen, indem man

$$\psi_{ik} = \frac{\partial L}{\partial x_{ik}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ik}}\right) = \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i}}^{n}{}' \frac{\varkappa m_i m_\nu}{r_{i\nu}^3}(x_{\nu k}-x_{ik}) - \frac{d}{dt}(m_i\dot{x}_{ik})$$

einsetzt. Von der Forderung $\delta\int L\,dt = 0$ ist bisher keinerlei Gebrauch gemacht. Betrachten wir nun jedoch die *Differentialgleichungen* des n-Körperproblems, so haben wir die Lagrangeschen Ausdrücke ψ_i gleich Null zu setzen, und die Gleichungen (12), deren linke Seiten dann verschwinden, liefern uns die zehn bekannten ersten Integrale des Problems, nämlich (12a) den Energiesatz, b) die drei ersten Schwerpunktssätze (auch Impulssätze genannt), c) die drei Flächensätze, und d) die drei zweiten Schwerpunktssätze. Die Form, in der die letzteren erscheinen, weicht von der sonst üblichen etwas ab; um zu dieser zu gelangen, hat man nur zu beachten, daß nach (12b) $\sum_i m_i\dot{x}_{ik} = c_k$ ist, woraus dann folgt:

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{n} m_i x_{ik} = c_k t + c_k' \qquad [k=1,2,3].$$

(c_k, c_k' = Konstanten.)

Für uns ist aber gerade die Form (12d) von Bedeutung, erstens, weil sie zeigt, daß die zweiten Schwerpunktssätze sich völlig in die Reihe der übrigen Erhaltungssätze einordnen, zweitens, weil sie uns so den Schlüssel zur Deutung der analogen elektrodynamischen Relationen (28) geben.

§ 3.

Übersicht über die im folgenden gebrauchten Bezeichnungen.

Vor der Behandlung der elektrodynamischen Gleichungen schicke ich eine Übersicht über die im folgenden gebrauchten Bezeichnungen voraus.

Im allgemeinen halte ich mich an die von M. v. Laue in seinem Buche „Die Relativitätstheorie" Bd. I gebrauchten, auch folge ich weiterhin v. Laue in der Symbolik für den drei- und vierdimensionalen Vektor- und Tensorkalkül, so häßlich diese auch ist, so daß der Leser alle ihm etwa unbekannten Symbole dort nachschlagen kann. Das Maßsystem ist das Lorentzsche[17]) in CGS-Einheiten. c bedeutet fortan, wie immer, die Lichtgeschwindigkeit.

Tabelle der Bezeichnungen[18])

in vierdimensionaler Schreibweise	in dreidimensionaler Schreibweise
x_1, x_2, x_3, x_4	x, y, z, ict $\mathfrak{r}$ = Vektor vom Koordinatenanfangspunkt nach einem festen Raumpunkt, nicht nach beweglichem Teilchen.
Elektromagnetischer Sechsertensor: f: $f_{23}, f_{31}, f_{12};\quad f_{14}, f_{24}, f_{34}$ $f_{ik} = -f_{ki}$	$\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z;\quad -i\mathfrak{E}_x, -i\mathfrak{E}_y, -i\mathfrak{E}_z$
Der dazu duale Sechsertensor: f^*: $f^*_{12} = f_{34},\ f^*_{13} = f_{42},\ f^*_{14} = f_{23}$ $f^*_{23} = f_{14},\ f^*_{24} = f_{31}.\ f^*_{34} = f_{12}$	
Viererpotential: φ: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$	
Analogon zur Lagrangeschen Funktion: $\Lambda = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} f_{ik}^2 = \frac{1}{2}\sum_{1 \leq i < k \leq 4} f_{ik}^2$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2)$

[17]) Siehe Encycl. d. math. Wissenschaften 5, Art. 13, 7d.

[18]) Bei der Gegenüberstellung sind nicht alle Größen in beide Spalten aufgenommen, um nicht durch weitere Vermehrung an Buchstaben, die doch nicht benutzt werden, zu verwirren.

in vierdimensionaler Schreibweise	in dreidimensionaler Schreibweise
Elektromagnetischer Energie-Impulstensor: $S_{ik} = S_{ki} = \sum_{l=1}^{4} f_{il} f_{lk} + \delta_{ik} \Lambda$ $\delta_{ik} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } i \neq k \\ 1, \text{ wenn } i = k \end{cases}$	$\begin{bmatrix} p_{exx} & p_{exy} & p_{exz} & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_{ex} \\ p_{eyx} & p_{eyy} & p_{eyz} & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_{ey} \\ p_{ezx} & p_{ezy} & p_{ezz} & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_{ez} \\ \frac{i}{c}\mathfrak{S}_{ex} & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_{ey} & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_{ez} & -W_e \end{bmatrix}$ p_e = Dichte der Maxwellschen Spannungen $\mathfrak{S}_e = c[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]$ = Poyntingscher Vektor der elektromagnetischen Energieströmung $W_e = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$ = Dichte der elektromagnetischen Feldenergie. $\mathfrak{g}_e = \frac{\mathfrak{S}_e}{c^2}$ = Dichte des elektromagnetischen Impulses des Feldes
Dichte des Viererstromes: P_1, P_2, P_3, P_4	$\frac{\varrho \mathfrak{q}_x}{c}, \frac{\varrho \mathfrak{q}_y}{c}, \frac{\varrho \mathfrak{q}_z}{c}, i\varrho$ ϱ = räumliche Dichte der elektrischen Ladung $\mathfrak{q}$ = Geschwindigkeitsvektor der elektrischen Ladungen bzw. ihrer materiellen Träger.
Dichte der elektrischen Viererkraft: F_1, F_2, F_3, F_4 $F_i = \sum_k f_{ik} P_k$	Dichte der vom Felde auf die Ladungen ausgeübten Kraft: $\mathfrak{F} = \varrho\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{q}, \mathfrak{H}]\right)$ Dichte der Leistung dieser Kraft: $(\mathfrak{F}\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{E}\mathfrak{q})$
Mechanischer Energie-Impulstensor: $R_{ik} = R_{ki}$	$\left(\begin{array}{c\|c} [[\mathfrak{g}_m, \mathfrak{q}]] & ic\mathfrak{g}_m \\ \hline \frac{i}{c}\mathfrak{S}_m & -W_m \end{array}\right)$

in vierdimensionaler Schreibweise	in dreidimensionaler Schreibweise
	$\mathfrak{g}_m$ = Dichte des mechanischen Impulses $= \dfrac{k_0\,\mathfrak{q}}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{q}^2}{c^2}}}$
	k_0 = Massendichte
	W_m = Dichte der kinetischen Energie der bewegten Materie $= \dfrac{k_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{q}^2}{c^2}}}$
	$\mathfrak{S}_m = \mathfrak{q}\,W_m$ = Dichte der durch die Bewegung der Materie vermittelten Energieströmung
Gesamter Energie-Impulstensor: $T_{ik} = T_{ki} = R_{ik} + S_{ik}$	$\begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & i c \mathfrak{g} \\ \frac{i}{c}\mathfrak{S} & -W \end{pmatrix}$
	$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_e + [[\mathfrak{g}_m, \mathfrak{q}]]$ = gesamter Spannungstensor
	$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_e + \mathfrak{g}_m$ = gesamte Impulsdichte
	$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_e + \mathfrak{S}_m$ = gesamte Energieströmung
	$W = W_e + W_m$ = gesamte Energiedichte.

§ 4.

Die Invarianz der Maxwellschen Gleichungen gegen die konforme Gruppe.

Von den beiden Systemen der Maxwellschen Gleichungen für den freien Äther

(14) $\qquad$ I. $\varDelta iv\, f^* = 0 \qquad$ II. $\varDelta iv\, f = 0$

wird das erste identisch befriedigt durch den Ansatz

(15) $\qquad f = \mathfrak{Rot}\ \varphi.$

Führt man diesen in II. ein, so werden die linken Seiten von II. genau die Lagrangeschen Ausdrücke ψ_i des Variationsproblems

$$\delta\overline{\int\int\int\int} \Lambda\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = 0,$$

bei dem x_1, x_2, x_3, x_4 als unabhängige Variable und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ als gesuchte Funktionen dieser zu betrachten sind und die Variation bei festem Rande und festen Randwerten der φ vorzunehmen ist, woran die Horizontalstriche erinnern sollen. Das hier auftretende Integral bleibt nun ungeändert, wenn man die $x_1, \ldots x_4$ einer beliebigen Transformation der 15 gliedrigen konformen Gruppe des R_4 unterwirft und gleichzeitig die Komponenten des Viererpotentials $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ kontragredient zu den Differentialen dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 umformt. Da wir es nur mit rein formalen Operationen zu tun haben, brauchen wir uns um die (vom Standpunkt des Physikers notwendigen) Realitätseinschränkungen der Parameter der Gruppe nicht zu kümmern. Die genannte Invarianz erkennt man leicht, wenn man unter Beachtung des Umstandes, daß sich die Größen $f_{ik} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}$ kontragredient zu den Größen $dx_i\, dx_k$ umsetzen, den Ausdruck ausrechnet, der durch beliebige lineare Transformation der dx aus dem Ausdruck

$$\Big(\sum_{i,k} f_{ik}^2\Big)\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

entsteht. Man findet so, daß er dann und nur dann in den neuen Variablen die gleiche Form

$$\Big(\sum_{i,k} \bar{f}_{ik}^2\Big)\, d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2\, d\bar{x}_3\, d\bar{x}_4$$

erhält wie in den alten, wenn die Transformation die Gleichung $\sum_i dx_i^2 = 0$ in die entsprechende $\sum_i d\bar{x}_i^2 = 0$ überführt. Die Gesamtheit dieser Transformationen bildet aber genau die konforme Gruppe.

Neben dieser endlichen kontinuierlichen Gruppe läßt das Variationsproblem offensichtlich noch eine unendliche Gruppe zu, welche die ersten Ableitungen einer willkürlichen Funktion enthält:

$$\bar{x}_i = x_i, \quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad [i = 1, 2, 3, 4],$$

da (vgl. 15) die Rotation eines Gradienten identisch verschwindet.

§ 5.

Aufstellung der formalen Identitäten.

Auf Grund der E. Noetherschen Sätze müssen jetzt 15 linear unabhängige lineare Verbindungen der Lagrangeschen Ausdrücke

$$(16)\qquad \psi_i = \sum_k \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right)$$

identisch zu Divergenzen werden, und außerdem muß zwischen den ψ_i und ihren ersten partiellen Ableitungen eine Abhängigkeit identisch erfüllt sein.

Ein System von 15 linear unabhängigen infinitesimalen Transformationen unserer $\mathfrak{G}_{15}$ ist das folgende[19]):

$$(17)\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \Delta x_k = \alpha_k, \\ &\text{b)}\quad \Delta x_k = \sum_\varrho \beta_{k\varrho} x_\varrho \qquad \begin{pmatrix}\beta_{kk} = 0 \\ \beta_{k\varrho} = -\beta_{\varrho k}\end{pmatrix}, \\ &\text{c)}\quad \Delta x_k = \gamma x_k, \\ &\text{d)}\quad \Delta x_k = 2x_k \sum_\varrho \varepsilon_\varrho x_\varrho - \varepsilon_k \sum_\varrho x_\varrho^2 \qquad [k = 1, 2, 3, 4]. \end{aligned}$$

Von diesen Transformationen entspricht die auf $k = 4$ bezügliche von a) der Transformation (11a) der Galilei-Newtongruppe, die drei andern (17a) den räumlichen Translationen (11b); die zu den Parametern $\beta_{23}, \beta_{31}, \beta_{12}$ gehörigen „räumlichen Rotationen" von (17b) entsprechen den Rotationen (11c) der Galilei-Newtongruppe, die drei übrigen zu $\beta_{14}, \beta_{24}, \beta_{34}$ gehörigen „zeitlichen Rotationen" entsprechen der Einführung einer anders gerichteten t-Achse bei festgehaltenem x, y, z-Raum in der Galilei-Newtongruppe (11d). Die Formeln (17c) und d) entspringen der Zusammensetzung je zweier Transformationen durch reziproke Radien. Die zu den dx kontragrediente Transformation der φ ist einfach gegeben durch die Formel

$$(18)\qquad \Delta \varphi_k = -\sum_\lambda \frac{\partial \Delta x_\lambda}{\partial x_k} \varphi_\lambda \qquad [k = 1, 2, 3, 4]$$

und die infinitesimale Transformation der unendlichen kontinuierlichen Gruppe durch

$$\Delta x_k = 0 \qquad \Delta \varphi_k = \frac{\partial p}{\partial x_k}.$$

---

[19]) Siehe z. B. S. Lie und F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen 3, Leipzig 1893, S. 281.

Betrachten wir zunächst die der letzten entsprechende Abhängigkeit. Nach (5) wird

$$\delta \varphi_i = \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

somit ergibt der Vergleich mit (9) und (10)

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_i = 0. \tag{19}$$

Um die Divergenzrelationen aufzustellen, bilden wir nach (8)

$$B_i = -\sum_k f_{ik} \Delta \varphi_k + \sum_\lambda \Delta x_\lambda \left\{ \sum_k f_{ik} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_\lambda} - \delta_{\lambda i} \Lambda \right\},$$

was auf Grund der Definition des elektromagnetischen Energie-Impulstensors S_{ik} übergeht in

$$B_i = -\sum_k f_{ik} \Delta \varphi_k + \sum_\lambda \Delta x_\lambda \left\{ -S_{\lambda i} + \sum_k f_{ik} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_k} \right\}. \tag{20}$$

Würden wir jetzt für Δx, $\Delta \varphi$ die Ausdrücke aus den Formeln (17) und (18) einsetzen, so würden wir zu Divergenzrelationen gelangen, die sehr lang und unübersichtlich gebaut sind[20]) und vor allem an dem wesentlichen Mangel leiden, daß in ihnen die Viererpotentialkomponenten φ, die doch hier nur mathematische Hilfsgrößen sind und keine selbständige reale physikalische Bedeutung haben, explizite und nicht nur in den physikalisch allein sinnvollen Verbindungen f_{ik} auftreten. Diesem Mangel läßt sich jedoch durch einen Kunstgriff abhelfen. Aus der unendlichen kontinuierlichen Gruppe lassen sich doch auf mannigfache Weisen endliche Gruppen aussondern, indem die Funktion p nicht völlig willkürlich, sondern nur von endlich viel Parametern abhängig genommen wird. Indem wir nun zu der Transformation (18) für ein in geeigneter Weise spezialisiertes p den Ausdruck $\frac{\partial p}{\partial x_k}$ hinzufügen, gewinnen wir gerade solche infinitesimale Transformationen, die zu Divergenzrelationen führen, in denen die φ nur noch in den Kombinationen f_{ik} auftreten. Wie wir das p zu spezialisieren haben, wird sich im Verlauf der Rechnung zeigen.

---

[20]) Nur als Beispiel gebe ich die aus (17d) fließenden Formeln

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big\{ 2 f_{ik} \sum_r x_r \varphi_r - 2 x_i x_k \Lambda + \sum_r f_{ir} \Big[2 (x_k \varphi_r - x_r \varphi_k) + 2 x_k \sum_s x_s \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_s}$$
$$- \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_k} \sum_s x_s^2 \Big] \Big\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \Big(\Lambda \sum_s x_s^2 \Big) = -\sum_i \psi_i \Big\{ 2 (x_k \varphi_i - x_i \varphi_k) + 2 x_k \sum_s x_s \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s}$$
$$- \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \sum_s x_s^2 \Big\} - 2 \psi_k \sum_r x_r \varphi_r \qquad [k = 1, 2, 3, 4].$$

Setzen wir demgemäß in (20) für $\Delta\varphi_k$ den Ausdruck

$$(21) \qquad -\sum_\lambda \frac{\partial \Delta x_\lambda}{\partial x_k}\varphi_\lambda + \frac{\partial p}{\partial x_k}$$

ein, so gewinnen wir

$$B_i = \sum_k f_{ik}\left\{\sum_\lambda \frac{\partial \Delta x_\lambda}{\partial x_k}\varphi_\lambda - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \sum_\lambda \Delta x_\lambda \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_k}\right\} - \sum_\lambda S_{\lambda i}\Delta x_\lambda$$

$$= \sum_k f_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_\lambda \varphi_\lambda \Delta x_\lambda - p\right) - \sum_\lambda S_{\lambda i}\Delta x_\lambda,$$

und nun erkennt man, daß die richtige Spezialisierung von p

$$p = \sum_\lambda \varphi_\lambda \Delta x_\lambda$$

ist. Nach (5) und (21) wird jetzt

$$\delta\varphi_i = \sum_\lambda f_{i\lambda}\Delta x_\lambda,$$

so daß die Divergenzrelationen die Gestalt annehmen

$$(22) \qquad \sum_i \sum_\lambda \psi_i f_{i\lambda}\Delta x_\lambda = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_\lambda S_{\lambda i}\Delta x_\lambda\right).$$

Setzen wir jetzt die Ausdrücke (17) ein, so erhalten wir

$$(23) \quad \text{a)} \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} S_{\lambda i} = \sum_i \psi_i f_{i\lambda} \qquad [\lambda = 1, 2, 3, 4],$$

$$\text{b)} \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_\mu S_{\nu i} - x_\nu S_{\mu i}) = \sum_i \psi_i (x_\mu f_{i\nu} - x_\nu f_{i\mu})$$

$$[(\mu, \nu) = (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)],$$

$$\text{c)} \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_\varrho x_\varrho S_{\varrho i}\right) = \sum_i \psi_i\left(\sum_\varrho x_\varrho f_{i\varrho}\right),$$

$$\text{d)} \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{2x_\lambda \sum_\varrho x_\varrho S_{\varrho i} - S_{\lambda i}\sum_\varrho x_\varrho^2\right\}$$

$$= \sum_i \psi_i\left\{2x_\lambda \sum_\varrho x_\varrho f_{i\varrho} - f_{i\lambda}\sum_\varrho x_\varrho^2\right\} \qquad [\lambda = 1, 2, 3, 4].$$

§ 6.

Einführung der physikalischen Ansätze.

Bis zu diesem Punkte handelte es sich wiederum nur um rein formale Identitäten, die sich durch Einsetzen von (16) und der aus der Tabelle auf Seite 266 – 268 folgenden Werte der S_{ik} als Funktionen der φ verifizieren

lassen. Erst jetzt setzt der physikalische Ansatz ein, indem für den freien Äther die Lagrangeschen Ausdrücke ψ_i gemäß (14 II) gleich Null gesetzt werden und für mit ponderabler Materie erfüllte Gebiete gleich den bezüglichen Komponenten des Viererstromes P_i [21]). Solcherweise folgen aus den Identitäten (19) und (23) nunmehr physikalische Sätze, die mit dem Namen „Erhaltungssätze" benannt zu werden pflegen. Um aber den physikalischen Inhalt in aller Vollständigkeit herauszubringen, dürfen wir uns bei Anwesenheit ponderabler Materie nicht auf die durch den Ansatz $\psi_i = P_i$ gelieferten Erscheinungen im elektromagnetischen Feld allein beschränken, sondern müssen die Wechselwirkung von Feld und ponderablen Massen berücksichtigen, die durch den Ausdruck für die Viererkraft

$$F_k = \sum_i f_{ki} P_i$$

geliefert wird. Diese Kraft- bzw. Leistungsdichte steht ihrerseits auf Grund der relativistischen Dynamik mit der Impuls- und der Energiedichte der durch sie bewegten Massen in der Beziehung

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial \mathfrak{g}_m}{\partial t} + \operatorname{div}[[\mathfrak{g}_m, \mathfrak{q}]],$$

$$(\mathfrak{F}\mathfrak{q}) = \frac{\partial W_m}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{q}\, W_m,$$

oder vierdimensional geschrieben

$$F_k = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} R_{ki}.$$

Hiernach nehmen die Erhaltungssätze die Form an

$$\text{(24)}\quad \text{a)}\quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} T_{\lambda i} = 0 \qquad [\lambda = 1, 2, 3, 4],$$

$$\text{b)}\quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_\mu T_{\nu i} - x_\nu T_{\mu i}) = 0 \qquad [(\mu, \nu) = (1,2), \ldots (3,4)],$$

$$\text{c)}\quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_\varrho x_\varrho T_{\varrho i}\Big) = \sum_i R_{ii},$$

$$\text{d)}\quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{2x_\lambda \sum_\varrho x_\varrho T_{\varrho i} - T_{\lambda i} \sum_\varrho x_\varrho^2\Big\} = 2x_\lambda \sum_i R_{ii} \qquad [\lambda = 1, 2, 3, 4],$$

wobei $S_{\lambda i} + R_{\lambda i} = T_{\lambda i}$ geschrieben und von der Symmetrie $R_{ik} = R_{ki}$ Gebrauch gemacht worden ist.

[21]) Ich beschränke mich der Einfachheit halber auf die Grundgleichungen der Elektronentheorie, d. h. auf den Grenzfall $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ der Gleichungen für ponderable Materie.

§ 7.

Die physikalische Deutung der Ergebnisse.

Um die physikalische Bedeutung der Sätze (24) zu ermitteln, spalten wir sie notgedrungen in ihre räumlichen und zeitlichen Bestandteile, obwohl die schöne Symmetrie der Formeln dadurch auf das Grausamste zerstört wird. Die Umschreibung in die dreidimensionale Vektoranalysis liefert, wenn noch K zur Abkürzung für die Summe ΣR_{ii} geschrieben wird,

(25) a_r)[22] $\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{g} + \mathfrak{div}\,\boldsymbol{p} = 0,$

a_z) $\frac{\partial}{\partial t} W + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0,$

b_r) $\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{r}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{div}\,[\mathfrak{r} \times \boldsymbol{p}] = 0$[23],

b_z) $\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathfrak{r}\frac{W}{c^2} - t\mathfrak{g}\right\} + \mathfrak{div}\left\{\left[\left[\mathfrak{r}, \frac{\mathfrak{S}}{c^2}\right]\right] - t\boldsymbol{p}\right\} = 0,$

c) $\frac{\partial}{\partial t}\{(\mathfrak{r}\mathfrak{g}) - Wt\} + \operatorname{div}\{[\mathfrak{r}, \boldsymbol{p}] - \mathfrak{S}t\} = K,$

d_r) $\frac{\partial}{\partial t}\{\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\mathfrak{g}) + [\mathfrak{r}, [\mathfrak{r}, \mathfrak{g}]] - 2\mathfrak{r}tW + c^2t^2\mathfrak{g}\}$

$+ \mathfrak{div}\{[[\mathfrak{r}, [\mathfrak{r}, \boldsymbol{p}]]] + [\mathfrak{r} \times [\mathfrak{r} \times \boldsymbol{p}]] - 2t[[\mathfrak{r}, \mathfrak{S}]] + c^2t^2\boldsymbol{p}\} = 2\mathfrak{r}K$

d_z) $\frac{\partial}{\partial t}\left\{2t(\mathfrak{r}\mathfrak{g}) - \frac{W}{c^2}(\mathfrak{r}^2 + c^2t^2)\right\}$

$+ \operatorname{div}\{2t[\mathfrak{r}, \boldsymbol{p}] - \mathfrak{g}(\mathfrak{r}^2 + c^2t^2)\} = 2tK.$

Zu diesen Gleichungen tritt noch die aus (19) folgende sogenannte Kontinuitätsgleichung der Elektrizität hinzu

(26) $$\operatorname{div}(\varrho\mathfrak{q}) + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0.$$

Die Gleichungen (25) formt man häufig aus der Differential- in eine Integralform um, indem man sie über ein dreidimensionales Raumstück

---

[22]) Der Index r entspricht den räumlichen, der Index z den zeitlichen Komponenten.

[23]) Da v. Laue das Zeichen $[\mathfrak{r}, \boldsymbol{p}]$ schon für den Vektor mit der x-Komponente $x\boldsymbol{p}_{xx} + y\boldsymbol{p}_{xy} + z\boldsymbol{p}_{xz}$ verbraucht hat, habe ich mir erlaubt, hier das Zeichen $[\mathfrak{r} \times \boldsymbol{p}]$ für den Tensor

$$\begin{pmatrix} y\boldsymbol{p}_{zx} - z\boldsymbol{p}_{yx} & y\boldsymbol{p}_{zy} - z\boldsymbol{p}_{yy} & y\boldsymbol{p}_{zz} - z\boldsymbol{p}_{yz} \\ z\boldsymbol{p}_{xx} - x\boldsymbol{p}_{zx} & z\boldsymbol{p}_{xy} - x\boldsymbol{p}_{zy} & z\boldsymbol{p}_{xz} - x\boldsymbol{p}_{zz} \\ x\boldsymbol{p}_{yx} - y\boldsymbol{p}_{xx} & x\boldsymbol{p}_{yy} - y\boldsymbol{p}_{xy} & x\boldsymbol{p}_{yz} - y\boldsymbol{p}_{xz} \end{pmatrix}$$

zu benutzen. Übrigens gilt $[\mathfrak{r}, \mathfrak{div}\,\boldsymbol{p}] = \mathfrak{div}\,[\mathfrak{r} \times \boldsymbol{p}]$.

integriert, wobei die Integrale über die Divergenzglieder zu Oberflächenintegralen werden. Wir wollen annehmen, daß wir ein abgeschlossenes im Endlichen gelegenes System von Massen und Ladungen vor uns haben, und daß die Komponenten des Energie-Impulstensors nach außen so rasch abnehmen, daß wir für ein hinreichend großes, Massen und Ladungen in seinem Innern enthaltendes Integrationsgebiet B die Oberflächenintegrale gegenüber den Raumintegralen vernachlässigen dürfen. Dann ergeben die Formeln (25 $\mathfrak{a}_r$), $\mathfrak{a}_z$) und $\mathfrak{b}_r$) die Erhaltung des Impulses, der Energie und des Drehimpulses unseres gesamten Systems:

(27) $\mathfrak{a}_r$) $$\iiint\limits_B \mathfrak{g}\, d\tau = \mathfrak{G} = \text{konstanter Vektor},$$

$\mathfrak{a}_z$) $$\iiint\limits_B W\, d\tau = E = \text{Konstante},$$

$\mathfrak{b}_r$) $$\iiint\limits_B [\mathfrak{r}, \mathfrak{g}]\, d\tau = \mathfrak{L} = \text{konstanter Vektor}.$$

Formel (25 $\mathfrak{b}_z$) dagegen nimmt zunächst die Gestalt

(28) $$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\iiint\limits_B \mathfrak{r}\frac{W}{c^2}\, d\tau - t\iiint \mathfrak{g}\, d\tau\right\} = 0$$

an, deren ganz deutliche Analogie zum zweiten Schwerpunktssatz (12 d) bei dem n-Körperproblem wir sogleich erkennen werden. Vom Standpunkte der Relativitätstheorie aus hat man ja Masse und Energie als identisch zu betrachten, und zwar ist eine Masse m als Energie von der Größe $m c^2$ anzusehen. Umgekehrt wird es gestattet sein, jede Energie mit der Dichte W einer Massendichte von der Größe $\frac{W}{c^2} = k$ äquivalent zu setzen. Hierdurch erhält auch das elektromagnetische Feld im freien Äther einen „Schwerpunkt", und

$$\iiint\limits_B \mathfrak{r}\frac{W}{c^2}\, d\tau = \iiint\limits_B \mathfrak{r}\, k\, d\tau$$

ist der mit der Gesamtmasse $\frac{E}{c^2}$ multiplizierte Radiusvektor vom Koordinatenanfangspunkt zu dem gemeinsamen Schwerpunkt von elektromagnetischem Feld und ponderabler Materie, entspricht also völlig der in (12 d) stehenden Größe $\sum_i m_i x_{ik}$, während die mit t multiplizierten Glieder in (28) und (12 d) beidemal den Gesamtimpuls des Systems bedeuten. Aus Formel (28) in Verbindung mit (27 $\mathfrak{a}_r$) folgt dann

(27 $\mathfrak{b}_z$) $$\iiint\limits_B \mathfrak{r}\frac{W}{c^2}\, d\tau = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{G}t \qquad (\mathfrak{C}_1 = \text{konstanter Vektor})$$

wieder in völliger Analogie zu (13), d. h.

Der gemeinsame Schwerpunkt des elektromagnetischen Feldes und der ponderablen Materie bewegt sich geradlinig gleichförmig.

Die fünf übrigen Sätze haben wegen des Auftretens der Größe K nicht mehr die Form reiner Erhaltungssätze $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right.$ von Raumintegral = Oberflächenintegral$\left.\right)$, wenn bewegte Körper im Integrationsgebiet vorhanden sind; daher läßt sich die Integration nach der Zeit nicht explizite durchführen. Trotzdem kommt den Sätzen natürlich ein wohlbestimmter physikalischer Sinn zu. Um aber die Auffassung zu erleichtern, wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß wir es nur mit den Erscheinungen im freien Äther zu tun haben, und daß keine ponderablen Massen durch das Feld bewegt werden. Dann wird $K = 0$ und wir haben wieder reine Erhaltungssätze, die wir in der Form schreiben können:

$$(27)\quad \text{c)}\quad \iiint\limits_B (\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}_e)\,d\tau = C_1 + E_e t,$$

$$\text{d}_r)\quad \iiint\limits_B \{\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}_e) + [\mathfrak{r}, [\mathfrak{r}, \mathfrak{g}_e]]\}\,d\tau = \mathfrak{C}_2 + 2c^2\mathfrak{C}_1 t + c^2\mathfrak{G}_e t^2,$$

$$\text{d}_s)\quad \iiint\limits_B \mathfrak{r}\,\frac{W_e}{c^2}\,d\tau = C_2 + 2C_1 t + E_e t^2$$

$$C_1, C_2 = \text{Konstanten}, \qquad \mathfrak{C}_2 = \text{konstanter Vektor}.$$

Am leichtesten verständlich von diesen Gleichungen ist d_s). Nach der Beziehung $\frac{W_e}{c^2}$ = „Massendichte" des elektromagnetischen Feldes bedeutet die linke Seite von d_s) die halbe Summe der Hauptträgheitsmomente der „elektromagnetischen Masse" des Feldes in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt, so daß wir sagen können:

Die Summe der elektromagnetischen Hauptträgheitsmomente des Feldes in bezug auf einen beliebigen festen Punkt ist eine quadratische Funktion der Zeit, und der Koeffizient des Zeitquadrates ist die doppelte Gesamtenergie des Feldes.

Die Gleichungen (27 c) und d_r) scheinen mir dagegen kein unmittelbares Analogon in der Mechanik zu haben. So wird man wohl die links stehenden Integranden als neue Größen in die Physik einführen müssen. Die Dimension von $(\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}_e)$ ist die der Dichte einer Wirkungsgröße und die von $\{\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}_e) + [\mathfrak{r}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}_e]]\}$ die des Momentes einer Wirkungsdichte.

Ich möchte nicht schließen, ohne meine Dankbarkeit gegen Fräulein Emmy Noether und Herrn Prof. Paul Hertz für ihr wohlwollendes Interesse, mit dem sie mich bei der Durchführung unterstützten, zum Ausdruck zu bringen.

(Eingegangen am 3. 3. 1921.)

Untersuchungen zur Quantentheorie.

Von

Hellmuth Kneser in Göttingen.

Einleitung.

Bei der quantentheoretischen Behandlung mechanischer Probleme wird die Gesamtheit der bei verschiedener Wahl der Anfangsbedingungen mechanisch möglichen Bewegungen in bestimmter Weise eingeteilt in „Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit". Die auf den Grenzen dieser Gebiete verlaufenden Bewegungen gelten als „statistisch ausgezeichnet". Auf welche Weise diese Einteilung vorzunehmen ist, darüber geben die *Quantenvorschriften* Auskunft, die von verschiedenen Forschern in verschiedenen Fassungen aufgestellt werden. Es drängen sich dabei die folgenden Fragen auf, zu deren Klärung die vorliegende Arbeit beitragen soll.

1. *Welche Voraussetzungen muß ein mechanisches System erfüllen, damit eine bestimmte Quantenvorschrift darauf anwendbar wird?*

Hierbei ist hervorzuheben, daß die qualitativen Voraussetzungen über Regularität der Bewegung und Verlauf im Endlichen in der physikalischen Literatur vielfach nicht erwähnt werden, da sie bei den meisten Systemen erfüllt sind, die analytisch vollständig behandelt werden konnten.

2. *Wenn eine Quantenvorschrift in zwei verschiedenen Koordinatensystemen anwendbar ist, ergibt sie dann dasselbe?*

3. *Wenn zwei Quantenvorschriften auf dasselbe System angewandt werden können, ergeben sie dann dasselbe?*

Im ersten Teile werden diese Fragen bezüglich der von Sommerfeld[1]), P. S. Epstein[2]), Schwarzschild[3]) und anderen aufgestellten Quantenvorschriften behandelt. Nachdem zu diesem Zwecke die Grundtatsachen aus

---

[1]) Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Ak. d. Wiss. 1915, S. 425f., 459f.

[2]) Ann. d. Phys. (4), **51** (1916), S. 489f.

[3]) Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. Wiss. 1916, S 548f.

der Hamilton-Jacobischen Integrationstheorie kurz berührt sind, wird die Frage 1 bezüglich der Vorschrift von Sommerfeld und Epstein durch eine von T. Levi-Civita[4]) aufgestellte Bedingung beantwortet (§ 3). Sodann wird die genannte Vorschrift durch Einführung der Winkelvariablen auf die von Schwarzschild zurückgeführt und damit die Frage 3 bejahend beantwortet. Dasselbe geschieht mit der Frage 2 dadurch, daß (§ 5) gezeigt wird, daß die Vorschrift von Schwarzschild in jedem Koordinatensystem zu demselben Ergebnis führt. Schließlich (§ 6) werden zwei weitere Quantenvorschriften ebenfalls auf die von Schwarzschild zurückgeführt, die sich demnach als die eindringendste herausstellt.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Vorschrift von Planck[5]). Da diese, wie Epstein[6]) gezeigt hat, die Schwarzschildsche umfaßt, sind nur die Fragen 1 und 3 zu erörtern. Zunächst (§ 7) wird die Bedeutung der *Ergodenhypothese* und der Existenz eindeutiger Integrale aufgewiesen, dann (§ 8) mit topologischen Hilfsmitteln gezeigt, daß bei zwei Freiheitsgraden die Plancksche Vorschrift nicht weiter reicht als die von Schwarzschild. Schließlich (§ 9) werden bei einem System, das in einem Grenzfalle der Schwarzschildschen Vorschrift zugänglich wird, Reihenentwicklungen für die eindeutigen Integrale aufgestellt, deren Koeffizienten bis auf einen gewissen Teil vollkommen bestimmt sind. Da sich auch diese mit Hilfe der *Adiabatenhypothese* festlegen lassen, ist auch hier die Frage 3 mit ja beantwortet.

I. Besondere Quantenvorschriften.

§ 1.

Vorbereitungen.

Die mechanischen Systeme, von denen die Rede sein wird, sollen die folgenden Voraussetzungen erfüllen. Der Zustand des Systems $\mathfrak{S}$ ist eindeutig bestimmt durch die Werte, die den n allgemeinen Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ beigelegt werden; dagegen kann verschiedenen Werten q der gleiche Zustand entsprechen. Der Einfachheit halber soll nur der Fall der „winkelartigen" Koordinate q_i betrachtet werden, in dem zu den Werten $q_1, \ldots, q_{i-1}, q_i + 1, q_{i+1}, \ldots, q_n$ derselbe Zustand des Systems $\mathfrak{S}$ gehört wie zu den Werten $q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n$. Ein Beispiel hierfür ist das Azimut bei Polarkoordinaten eines Punktes, das noch mit 2π zu dividieren ist. Eine winkelartige Koordinate braucht keine zyklische zu sein. Die Koordinaten dürfen alle Werte eines Gebietes annehmen (die winkel-

[4]) Math. Ann. **59** (1904), S. 383f.

[5]) Ann. d. Phys. (4), **50** (1916), S. 385f.

[6]) Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. Wiss. 1918, S. 435f.

artigen sind unbeschränkt), wobei das System nur einen Teil der möglichen Zustände zu durchlaufen braucht. Doch soll es möglich sein, mit endlich vielen Koordinatensystemen dieser Art jeden Zustand von $\mathfrak{S}$ darzustellen und insbesondere werden nur solche Bewegungen betrachtet, die ganz im Inneren des Gebietes verlaufen, in dem eines dieser Koordinatensysteme gilt.

Die Bewegung werde durch ein Variationsprinzip

(1) $$\delta\int L(q_1, \ldots, q_n, \dot q_1; \ldots, \dot q_n)\,dt = 0,$$

d. h.

(1′) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmt, worin die Lagrangesche Funktion L in jedem Koordinatensystem eine im Gültigkeitsgebiet reguläre Funktion der Argumente ist. Durch diesen Ansatz werden auch Bewegungen umfaßt, bei denen die Kraft von der Geschwindigkeit abhängt, wie die Bewegung eines elektrisch geladenen Körpers im Magnetfelde.

§ 2.

Kanonische Variable.

Die Variationsaufgabe (1) wird in bekannter Weise auf übersichtlichere Formen gebracht. Zunächst ist sie gleichbedeutend mit der Aufgabe

(2a) $$\delta\int L(q_1, \ldots, q_n, r_1, \ldots, r_n)\,dt = 0$$

mit den unbekannten Funktionen $q_1, \ldots, q_n, r_1, \ldots, r_n$ und den Nebenbedingungen

(2a′) $$\dot q_i - r_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Multipliziert man die linken Seiten dieser Gleichungen mit unbestimmten Funktionen λ_i und fügt sie zum Integranden L hinzu, so ist eben wegen (2a′)

(2b) $$\delta\int\Big(L(q, r) + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(\dot q_k - r_k)\Big)dt = 0,$$

und weil (2b) identisch in $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gilt, folgt rückwärts (2a). Die Variationsgleichung für r_i lautet

(2b′) $$\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(q, r) - \lambda_i = L_{\dot q_i}(q, r) - \lambda_i = 0.$$

Setzt man hieraus λ_i ein, so wird

(2c) $$\delta\int\Big(L(q, r) + \sum_k L_{\dot q_k}(q, r)\cdot(\dot q_k - r_k)\Big)dt = 0.$$

Hier kommen zwar, wie schon in (2a), nicht mehr n sondern $2n$ unbekannte Funktionen vor, doch treten die Ableitungen der einen Reihe (r) gar nicht, die der anderen linear auf, so daß die Variationsgleichungen von der ersten Ordnung werden. Die Koeffizienten von $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, die „Impulse" $p_1, \ldots, p_n$ werden an Stelle von $r_1, \ldots, r_n$ eingeführt; es wird gesetzt:

$$L_{\dot{q}_i}(q, r) = p_i, \qquad \sum_k p_k r_k - L(q, r) = H(q, p).$$

Um dies zu ermöglichen, werde vorausgesetzt, daß in jedem Koordinatensystem die Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ sich als reguläre Funktionen der Größen q, p darstellen, wenn diese die Werte des Gültigkeitsgebiets annehmen. Das ist z. B. der Fall, wenn L ein Polynom zweiten Grades in $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ mit definitem quadratischem Teil ist. Die Variationsforderung hat dann die kanonische Form

$$\delta \int \Big(\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q, p) \Big) dt = 0; \tag{3}$$

die Variationsgleichungen sind

$$\dot{q}_i = H_{p_i}, \qquad \dot{p}_i = -H_{q_i}. \tag{3'}$$

Sogleich ergibt sich das Energieintegral

$$\frac{dH}{dt} = 0, \qquad H(q, p) = \alpha.$$

Bei der kanonischen Form des Variationsprinzipes und der Bewegungsgleichungen ist an die Stelle der Funktion L die gleichfalls von $2n$ Argumenten abhängende Funktion H getreten. Die quantentheoretisch vollständig behandelten Probleme sind nun, wie sich zeigen wird, die, bei denen sich solche kanonische Veränderliche einführen lassen, daß H nur von der einen Reihe abhängt.

§ 3.

Hamiltonsche Differentialgleichung. Trennung der Variablen.

Die Lösung der Variationsaufgabe (1) oder (3) kommt bekanntlich mit dem Auffinden einer vollständigen Lösung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) - \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

überein, d. h. einer solchen Lösung $W(q_1, \ldots, q_n, t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, die von n Parametern $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ derart abhängt, daß es zu gegebenen Werten $t, \mathring{q}, \mathring{p}$ im Gültigkeitsgebiete immer ein Wertsystem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gibt, so daß

$$\frac{\partial W(\mathring{q}, t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial q_i} = \mathring{p}_i$$

ist. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen (3') ergeben sich durch Elimination aus

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \qquad \frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = H(q, p).$$

Da $H = \alpha$ ein Integral ist, setzt man

$$W = S(q, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \alpha t$$

und kommt zu der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung des Jacobischen Prinzips

$$(4) \qquad H(q, p) = \alpha, \qquad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i},$$

deren vollständige Integration wiederum mit der der Gleichungen (3') gleichbedeutend ist.

In den Fällen, wo diese Integrationsmethode zum Ziele geführt hat, war die vollständige Lösung S immer von der Gestalt

$$(5) \quad S = S_1(q_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + S_2(q_2, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \ldots + S_n(q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Die Bedingungen, die dafür notwendig sind, hat T. Levi-Civita[4]) aufgestellt. Setzt man nämlich (5) in (4) ein und differenziert nach q_i und dann nach q_k $(k \neq i)$, so wird

$$H_{q_i} + \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_i^2} H_{p_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$H_{q_i q_k} + \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_i^2} H_{p_i q_k} + \frac{\partial^2 S_k}{\partial q_k^2} H_{q_i p_k} + \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_i^2} \frac{\partial^2 S_k}{\partial q_k^2} H_{p_i p_k} = 0$$

$$(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots n).$$

Elimination der zweiten Ableitungen von S ergibt

$$(6) \quad H_{p_i} H_{p_k} H_{q_i q_k} - H_{p_i} H_{q_k} H_{q_i p_k} - H_{q_i} H_{p_k} H_{p_i q_k} + H_{q_i} H_{q_k} H_{p_i p_k}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & H_{q_i} & H_{p_i} \\ H_{q_k} & H_{q_i q_k} & H_{p_i q_k} \\ H_{p_k} & H_{q_i p_k} & H_{p_i p_k} \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Lösung S eine vollständige sein soll, muß die Funktion H den $\frac{n \cdot n - 1}{2}$ Differentialgleichungen (6) für alle Argumentwerte genügen.

Gelten umgekehrt die Gleichungen (6), so findet man eine vollständige Lösung von (4) in der Form (5) auch ohne Benutzung von Potenzreihen in folgender Weise. Sind irgendwelche Anfangswerte $\mathring{q}_1, \ldots, \mathring{q}_n, \mathring{p}_1, \ldots, \mathring{p}_n$ gegeben, die nur keine der Ableitungen H_{p_i} zu Null machen, so definiere man p_1 als Funktion der q durch

$$p_1(\mathring{q}_1, q_2, \ldots, q_n) = \mathring{p}_1$$

und die Differentialgleichung

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_1} = -\frac{H_{q_1}}{H_{p_1}}(1).$$

Dabei soll hier und im folgenden eine Klammer (l) bedeuten, daß den Argumenten $q_{l+1}, \ldots, q_n, p_{l+1}, \ldots, p_n$ die Anfangswerte $\overset{0}{q}, \overset{0}{p}$ beizulegen sind. Schritt für Schritt wird p_i durch

$$p_i(q_1, \ldots, q_{i-1}, \overset{0}{q}_i, q_{i+1}, \ldots, q_n) = \overset{0}{p}_i, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial q_i} = -\frac{H_{q_i}}{H_{p_i}}(i)$$

als eine in einer Umgebung der Anfangswerte reguläre Funktion der Argumente q definiert, die offenbar nur von $q_1, \ldots, q_i$ abhängt. Daß p_i von q_i allein abhängt, zeigt sich so. Weiß man, daß p_1 nur von q_1, p_2 nur von $q_2, \ldots, p_{i-1}$ nur von q_{i-1} abhängt, so ist für jedes $k \leqq l \leqq i$

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial q_l}\frac{H_{q_k}}{H_{p_k}}(l) = \frac{H_{q_k q_l}}{H_{p_k}}(l) - \frac{H_{q_k} H_{p_k q_l}}{H_{p_k}^2}(l) + \frac{\partial p_l}{\partial q_l}\left(\frac{H_{p_k p_l}}{H_{p_k}}(l) - \frac{H_{q_k} H_{p_k p_l}}{H_{p_k}^2}(l)\right).$$

Nun ist

$$\frac{\partial p_l}{\partial q_l} = -\frac{H_{q_l}}{H_{p_l}}(l);$$

also verschwindet die rechte Seite von (7) zufolge den Gleichungen (6). Setzt man nacheinander in (7) $l = i, l = i-1, \ldots, l = k+1$, so erhält man

$$(7') \qquad \frac{H_{q_k}}{H_{p_k}}(i) = \frac{H_{q_k}}{H_{p_k}}(i-1) = \ldots = \frac{H_{q_k}}{H_{p_k}}(k).$$

Jetzt ist

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial q_i \partial q_k} = -\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{H_{q_i}}{H_{p_i}}(i)$$

$$= -\frac{H_{q_i q_k}}{H_{p_i}}(i) + \frac{H_{q_i} H_{p_i q_k}}{H_{p_i}^2}(i) - \left(\frac{H_{q_i p_k}}{H_{p_i}}(i) - \frac{H_{q_i} H_{p_i p_k}}{H_{p_i}^2}(i)\right)\frac{H_{p_k}}{H_{q_k}}(k).$$

Nach (7′) darf man die letzte Klammer (k) durch (i) ersetzen, und so verschwindet die rechte Seite nach (6). Für $q_i = \overset{0}{q}_i$ ist aber p_i konstant gleich $\overset{0}{p}_i$, $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0$, so daß überall $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0$ wird, d. h. p_i nur von q_i abhängt. Setzt man also

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i, \qquad S_i = \int_{\overset{0}{q}_i}^{q_i} p_i \, dq_i,$$

so ist

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial S_i}{\partial q_i} = p_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = H_{q_i} + H_{p_i}\frac{\partial^2 S}{\partial q_i^2} = H_{q_i} - H_{p_i}\frac{H_{q_i}}{H_{p_i}} = 0,$$

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = H(\overset{0}{q}, \overset{0}{p}) = \alpha;$$

S ist eine vollständige Lösung der Gleichung (4) in der Gestalt (5).

Nachträglich läßt sich die Bildung der Funktion S sehr leicht überblicken. Man löst die Gleichung $H(q_i, p_i) = \alpha$ nach p_i auf und erhält p_i als Funktion von q_i, die durch die Kurve $H = \alpha$ in der q_i-p_i-Ebene dargestellt wird. Für die Trennung der Variablen ist es kennzeichnend, daß sich der Punkt (q_i, p_i) nicht nur augenblicklich in der Richtung dieser Kurve bewegt, sondern dauernd auf ihr verbleibt. Liegt auf der Kurve kein Punkt $H_{q_i} = H_{p_i} = 0$ und führt sie aus dem Gültigkeitsgebiet hinaus, so verläßt der Punkt (q_i, p_i) das Gebiet. Kommt es daher auf Bewegungen an, die dauernd im Gültigkeitsgebiete verlaufen, so muß die Kurve entweder einen Punkt $H_{q_i} = H_{p_i} = 0$ enthalten — das ist nur bei isolierten Anfangswerten $\overset{0}{p}_i$ der Fall — oder sie muß ganz im Inneren des Gültigkeitsgebietes liegen. Das kann sie bei der Regularität der Funktion H nur, wenn sie geschlossen ist. Ist die Koordinate q_i winkelartig, so muß entsprechend die Kurve $H(q_i, p_i) = \alpha$ durch Verschiebung längs der q_i-Achse um eine ganzzahlige Strecke m in sich übergehen. Der Beweis dafür, daß $m = 1$ ist, soll nur angedeutet werden. Ist $\mathfrak{C}$ eine Kurve dieser Art und R ein Punkt außerhalb von $\mathfrak{C}$, so dreht sich der Strahl RP asymptotisch um 180^0, wenn der Punkt P die Kurve $\mathfrak{C}$ von $q_i = -\infty$ bis $q_i = +\infty$ durchläuft. Je nachdem, ob dies im positiven oder negativen Sinne geschieht, heiße es: R liegt über oder unter $\mathfrak{C}$. Ist $\mathfrak{D}$ eine andere Kurve der gleichen Art, die $\mathfrak{C}$ nicht schneidet, und liegt ein Punkt von $\mathfrak{D}$ über $\mathfrak{C}$, so liegt jeder Punkt von und über $\mathfrak{D}$ auch über $\mathfrak{C}$, ja auch jeder Punkt einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{D}$. Nimmt man nun an, daß eine Kurve $H = \alpha$ erst durch m-malige Verschiebung um die Strecke 1 in sich übergeht, so wendet man dies auf diese Kurve und die aus ihr durch Verschiebung um die Strecken $1, 2, \ldots, m$ hervorgehenden Kurven an, so folgt, daß jeder Punkt in der Umgebung der m-ten Kurve, die ja mit der ursprünglichen zusammenfällt, über dieser liegt, was offenbar nicht zutrifft. Es müßten sich also zwei dieser m Kurven schneiden, d. h. auf der Kurve $H = \alpha$ müßte ein Doppelpunkt, ein Punkt $H_{q_i} = H_{p_i} = 0$ liegen. Eine Kurve $H = \alpha$, auf der kein solcher Punkt liegt, geht daher schon durch Verschiebung um 1 in sich über.

§ 4.

Die Quantenvorschrift nach Sommerfeld und Epstein.

Die Quantenvorschrift in der Gestalt, wie sie Sommerfeld[1]) zuerst angewandt und P. S. Epstein[2]) genauer ausgeführt hat, lautet:

($\mathfrak{A}$) *Statistisch ausgezeichnet sind die Bewegungen, bei denen in jeder q_i-p_i-Ebene die Kurve $H = \alpha$, die Bahnkurve des Punktes (q_i, p_i), eine Fläche umschließt, die ein ganzes Vielfaches des*

elementaren Wirkungsquantums h ist; oder, analytisch ausgedrückt, bei denen

(𝔄)
$$P_i = \oint p_i dq_i = n_i h$$

ist.

Dabei bedeutet das Zeichen $\oint$, daß längs der geschlossenen Kurve $H = \alpha$, auf der sich der Punkt (q_i, p_i) bewegt, in der Richtung der wirklichen Bewegung integriert wird. Betrachtet man p_i als mehrdeutige Funktion von q_i, bestimmt durch die Gleichung $H = \alpha$, so ist der Integrationsweg auf der Riemannschen Fläche dieser Funktion geschlossen und geht durch ihre Verzweigungspunkte. Verschiebt man ihn aber ins Komplexe, so daß er ganz im Regularitätsgebiete verläuft, so erkennt man, daß P_i ebenso wie p_i von den Anfangswerten $\overset{0}{p}$ an der Stelle $\overset{0}{q}$ regulär abhängt.

Ist q_i eine winkelartige Koordinate, und ist die Kurve $H = \alpha$ nicht geschlossen — dann würde das soeben Gesagte gelten —, sondern geht sie durch Verschiebung um die Strecke 1 in der q_i-Richtung in sich über, so bildet man nach der gewöhnlichen Übung

$$P_i = \int_0^1 p_i dq_i.$$

Dieser Wert ist nicht eindeutig bestimmt: ersetzt man die Lagrangesche Funktion L durch $L + c\dot{q}_i$ — dabei bleiben die Bewegungsgleichungen ungeändert —, so erhalten p_i und P_i den beliebigen Zuwachs c. Nun ist bei nicht winkelartigen Koordinaten der Wert $P = 0$ dadurch ausgezeichnet, daß die Kurve $H = \alpha$ sich auf einen Punkt zusammenzieht, in dem $H_{q_i} = H_{p_i} = 0$ ist. Verlangt man dasselbe bei winkelartigen Koordinaten, so ist dadurch die Konstante eindeutig festgelegt, wenn die Kurve $H = \alpha$ nur für einen Wert α durch einen Punkt $H_{q_i} = H_{p_i} = 0$ geht. Dies trifft zu in dem Falle der zyklischen Koordinate, d. h. wenn H von q_i nicht abhängt und H_{p_i} nur für einen Wert p_i verschwindet.

Die Vorschrift (𝔄) wird im allgemeinen nur dann ausführbar sein, wenn die n Größen $P_1, \ldots, P_n$ voneinander unabhängig sind; hinge eine Anzahl von ihnen von den übrigen ab, so wären dadurch, daß man diesen die Werte $n_i h$ beilegt, die Werte der ersteren bestimmt und im allgemeinen keine Vielfachen von h. Es werde nunmehr vorausgesetzt, daß $P_1, \ldots, P_n$ voneinander unabhängig sind. In die Funktion $S(q_1, \ldots, q_n, \overset{0}{p}_1, \ldots, \overset{0}{p}_n)$ kann man statt der Anfangswerte $\overset{0}{p}$ die Größen $P_1, \ldots, P_n$ einführen und erhält so

$$S(q, \overset{0}{p}) = S'(q, P).$$

Als Funktion der P ist S' in der Umgebung eines Wertsystems regulär; als Funktion der q ist dS' endlichvieldeutig und S' erhält bei Fortsetzung längs geschlossener Wege die Zuwächse $P_1, \ldots, P_n$.

Setzt man

$$(8)\qquad Q_i=\frac{\partial S'}{\partial P_i},\qquad p_i=\frac{\partial S'}{\partial q_i},$$

so ist

$$\sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i-\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i=d\Big(\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i - S'(q,P)\Big);$$

man hat eine kanonische Transformation, sobald man weiß, daß sich in einem Gebiete die Werte q, p und Q, P eineindeutig entsprechen. Nun wurden in § 3 die Impulse p in einer Umgebung der Werte $\overset{0}{q}, \overset{0}{p}$ als reguläre Funktionen der q und der Anfangswerte $\overset{0}{p}$ definiert, die für $q_i=\overset{0}{q}_i$ in diese Werte übergingen. Die Funktionaldeterminante der p nach den $\overset{0}{p}$ ist also 1 für $q_i=\overset{0}{q}_i$; daher können in einer Umgebung dieser Werte die p statt der $\overset{0}{p}$ in die Funktion $S(q,\overset{0}{p})$ eingeführt werden. In dieser Umgebung hängen daher die Q und P regulär von q und p ab. Die Funktionaldeterminante ist, in verständlicher Abkürzung,

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}=\begin{vmatrix}\left(\dfrac{\partial^2 S'}{\partial P_i\,\partial q_k}\right) & \left(\dfrac{\partial P_i}{\partial q_k}\right)\\[2ex] \left(\dfrac{\partial^2 S'}{\partial P_i\,\partial p_k}\right) & \left(\dfrac{\partial P_i}{\partial p_k}\right)\end{vmatrix}.$$

Die Differentiationen sind so zu verstehen, daß S' zuerst als Funktion der q und P nach P_i, dann als Funktion der q und p nach q_k bzw. p_k, und P_i als Funktion der q und p differenziert wird. Setzt man $q_i=q_i$, so ist $S'=0$ für alle Werte P oder $\overset{0}{p}$; daher verschwinden an dieser Stelle die Elemente des linken unteren Teilquadrates. Die Elemente des linken unteren Teilquadrates bleiben an der Stelle $q_i=\overset{0}{q}_i$ ungeändert, wenn man die Reihenfolge der Differentiationen umkehrt: es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial S'}{\partial P_i}&=\frac{\partial}{\partial q_k}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial P_i}=\sum_{l=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial p_l\,\partial q_k}\frac{\partial p_l}{\partial P_i}+\frac{\partial S}{\partial p_l}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial p_l}{\partial P_i}\right)\right]\\ &=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q_k\,\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial P_i}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial p_l}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial p_l}{\partial P_i}\right)\\ &=\frac{\partial}{\partial P_i}\left(\frac{\partial S}{\partial q_k}\right)+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial p_l}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial p_l}{\partial P_i}\right),\end{aligned}$$

und hier verschwindet das zweite Glied bei $q_i=\overset{0}{q}_i$, da dann $S=0$ ist und nicht von p abhängt. Die Determinante wird daher

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}=\frac{\partial(\overset{0}{p})}{\partial(P)}\cdot\frac{\partial(P)}{\partial(\overset{0}{p})}=1,$$

die Einführung der Q, P an Stelle der q, p ist eine kanonische Transfor-

mation. Da bei einer solchen die Funktionaldeterminante überall 1 ist, kann die vieldeutige Abhängigkeit zwischen q, p und Q, P nur dadurch zuwege kommen, daß der Punkt q, p einen geschlossenen Weg beschreibt. Bleibt dieser in einer genügend engen Umgebung der Punkte $p_i = \frac{\partial S(q, \overset{0}{p})}{\partial q_i}$, d. h. der Punkte, die der Punkt $\overset{0}{q}, \overset{0}{p}$ im Verlaufe der Bewegung möglicherweise trifft, so vermehrt sich S um eine Summe von Größen P. Da $\frac{\partial P_i}{\partial P_k} = 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem $i = k$ oder $i \neq k$ ist, entsprechen einem Wertsystem q, p Werte Q, die sich um ganze Zahlen unterscheiden.

Es soll nunmehr bewiesen werden, daß bei festem P die Koordinaten Q jedes Wertsystem annehmen, und zwar ist nur von den Wertsystemen die Rede, die durch Fortsetzung im Reellen erreichbar sind. Es genügt, dies von den Werten $0 \leqq Q_i \leqq 1$ zu beweisen; denn wenn die Werte $Q_i = a$ angenommen werden, so werden es auch die Werte $Q_i = a_i + m_i$ mit ganzzahligen m_i. Man führe auf der Kurve $H = \alpha$ in der q_i-p_i-Ebene einen Parameter R_i ein, der sich stetig wachsend um 1 vermehrt, wenn der Punkt (q_i, p_i) die Kurve einmal im Sinne der wirklichen Bewegung durchläuft. Dann sind sämtliche q und p eindeutige stetige periodische Funktionen der R. Die Q dagegen sind eindeutig und stetig mit der Eigenschaft

$$Q_i(R_1, \ldots, R_{k-1}, R_k + 1, R_{k+1}, \ldots, R_n) = Q_i(R_1, \ldots, R_n) + \delta_{ik}$$
$$(\delta_{ik} = 1, \text{ wenn } i = k, \quad \delta_{ik} = 0, \text{ wenn } i \neq k),$$

so daß $R_i - Q_i$ eindeutige stetige periodische Funktionen der R und als solche beschränkt sind. Ist also durchweg

$$|R_i - Q_i| < M,$$

so betrachte man die Funktionen Q_i in dem Würfel

$$-(M+1) \leqq R_i \leqq M + 1.$$

Nach einem Satze von Brouwer[7]) wird jedes Wertsystem $|Q_i| \leqq 1$ mindestens in einem Punkte des Würfels angenommen. Durch Vermehrung

[7]) Es ist der „Hilfssatz" in der Arbeit Math. Ann. **71** (1911), S. 161f. Man sieht sofort, daß genau der hier gebrauchte Satz bewiesen, obgleich in etwas geringerem Umfange ausgesprochen ist. Etwas weniger bequem wären ähnliche Sätze von P. Bohl (Journ. f. d. r. u. ang. Math. **127** (1905), S. 173f., insbesondere § 3) anzuwenden. Daß hier, im Gegensatze zu der eingehenden rechnerischen Behandlung ähnlicher Fragen bei Staude (Math. Ann. **29** (1887), S. 468f.; Journ. f. d. r. u. ang. Math. **105** (1889), S. 298f.) und Stäckel (Journ. f. d. r. u. ang. Math. **128** (1905), S. 222f.) ein bloßer Existenzbeweis gegeben ist, fällt nicht schwer ins Gewicht, da man die Q analytisch von ihrer Definition her kennt.

der Q und R um ganze Zahlen zeigt sich, daß jedes Wertsystem der Q angenommen wird. Da die Funktionaldeterminante der Q, P nach den q, p überall 1 ist, können die q, p in der Umgebung jedes Wertsystems der Q als reguläre Funktionen der Q (bei festen P) dargestellt werden. Eine in der Umgebung jedes Punktes des einfach zusammenhängenden Bereichs aller rellen Q eindeutige Funktion ist aber überhaupt im Reellen eindeutig: so hat man q, p als im Reellen durchweg reguläre Funktionen der Q. Nun konnte man durch Fortsetzung im Reellen bei Rückkehr zu denselben Werten q, p bei festen P die Q um beliebige ganze Zahlen m_i vermehren; daher gehören zu den Werten $Q_i + m_i$ dieselben Werte der q und p wie zu Q_i: *die ursprünglichen Koordinaten sind reguläre periodische Funktionen der Q.*

Nach der Definition der P sind diese längs der Bahnkurve konstant; so folgt aus den Bewegungsgleichungen

$$\dot{P}_i = -H_{Q_i} = 0$$

— hier sind Q, P statt q, p in H einzuführen —, daß H nur von den P abhängt. Demnach ist

$$\dot{Q}_i = H_{P_i} = \mathfrak{R}_i$$

zeitlich konstant; die Q sind lineare Funktionen der Zeit. Dieser Bewegungstypus, bei dem die ursprünglichen Koordinaten periodische Funktionen von n linearen Funktionen der Zeit sind, heißt der bedingt periodische.

Die Größen $\mathfrak{R}_i$ heißen die mittleren Bewegungen. Sollte zwischen ihnen identisch, d. h. für alle Werte P, eine Anzahl linearer Gleichungen der Form

$$m_1 \mathfrak{R}_1 + \ldots + m_n \mathfrak{R}_n = 0 \tag{9}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten m, die nicht alle Null sind, bestehen, so kann man durch eine ganzzahlige lineare Substitution $\mathfrak{R}_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \mathfrak{R}'_k$ mit der Determinante 1 bewirken, daß ein Teil der Größen $\mathfrak{R}'$ identisch verschwindet und zwischen den übrigen — es seien dies $\mathfrak{R}'_1, \ldots, \mathfrak{R}'_s$ — keine Gleichung der Form (9) gilt. Übt man diese Substitution auf die Q und die kontragrediente auf die P aus — das ist eine kanonische Transformation —, so erhält man ein Koordinatensystem mit denselben ausgezeichneten Eigenschaften — es werde gleich wieder mit Q, P bezeichnet —, in dem

$$\mathfrak{R}_{s+1} = \mathfrak{R}_{s+2} = \ldots = \mathfrak{R}_n = 0$$

ist, d. h. H nur von $P_1, \ldots, P_s$ abhängt, und zwischen $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_s$ keine Gleichung (9) identisch besteht.

§ 5.

Die Quantenvorschrift nach Schwarzschild. Eindeutigkeit der Quantenvorschrift.

Schwarzschild[8]) benutzte die hier gefundenen kanonischen Variablen, die „Winkelvariablen" Q und die zugehörigen Impulse P, die „Wirkungsvariablen", um allgemein, auch für die „entarteten" Fälle, d. h. die, in denen $s < n$ ist, die Quantenvorschrift folgendermaßen auszusprechen:

(𝔅) *Hat man ein System kanonischer Variablen Q, P derart, daß H (die Energie) nur von den P abhängt, und sind die Q winkelartige Koordinaten (siehe § 1), bestehen ferner zwischen den mittleren Bewegungen $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_s$ ($\mathfrak{N}_i = H_{P_i}$) keine Gleichungen* (9) *für alle Werte P, während $\mathfrak{N}_{s+1} = \ldots = \mathfrak{N}_n = 0$ ist, so sind die Bewegungen mit*

$$P_i = \overset{0}{P}_i + n_i h \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

statistisch ausgezeichnet.

Die Konstanten $\overset{0}{P}_i$ sollen dabei die von Planck so genannten Singularitäten des Phasenraumes bezeichnen. Ist man auf dem in § 4 verfolgten Wege über die Trennung der Variablen in der Hamiltonschen Gleichung (4) zu den Koordinaten Q, P gelangt, so sind die Singularitäten $P_i = 0$ daran zu erkennen, daß sich in ihrer Umgebung die q, p als Funktionen der Q, P verzweigen. Wenn dies, wie es bei den bisher genauer behandelten Fällen zutrifft, die einzigen Verzweigungen sind, so sind dadurch in der Tat die Konstanten $\overset{0}{P}_i$ eindeutig festgelegt. Gegen die Bezeichnung „Singularitäten des Phasenraumes" könnte eingewandt werden, daß das Bild der Bewegung etwa bei $P_1 = 0$ keine anderen Besonderheiten aufweist, als wenn den P solche Werte beigelegt werden, daß eine Gleichung (9) besteht. Im „Lagenraume" der q allein ist freilich das Bild ein anderes.

Es erhebt sich die Frage, ob die Vorschrift (𝔅) in verschiedenen Koordinatensystemen zu demselben Ergebnis führt. Sei also $Q'_1, \ldots, Q'_n$, $P'_1, \ldots, P'_n$ ein zweites Koordinatensystem mit denselben Eigenschaften, bei dem zwischen den von Null verschiedenen mittleren Bewegungen $\mathfrak{N}'_1, \ldots, \mathfrak{N}'_{s'}$ keine Gleichung der Form (9) identisch besteht. Die besonderen Wertsysteme der Q, P, für die zwischen den $\mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{N}'$ eine solche Gleichung besteht, sind die Nullstellen der abzählbar unendlich vielen nicht identisch verschwindenden analytischen Funktionen $m_1 \mathfrak{N}_1 + \ldots + m_s \mathfrak{N}_s$ und $m_1 \mathfrak{N}'_1 + \ldots + m_{s'} \mathfrak{N}_{s'}$ (mit allen ganzzahligen Werten m, außer $m_1 = m_2 = \ldots = 0$). Sie bilden die Vereinigungsmenge von abzählbar unendlich vielen Mengen des Maßes Null, die selbst das Maß Null hat.

Daher liegen die Wertsysteme (Q, P), für die keine jener Gleichungen gilt, überall dicht. Wählt man die Bahnkurve durch einen solchen Punkt, so kommt sie nach dem Annäherungssatze von Kronecker*) jedem Wertsysteme der $Q_1 \ldots Q_s$ bis auf ganze Zahlen beliebig nahe; sie bedeckt im Phasenraume der q, p ein s-fach ausgedehntes analytisches Gebilde $\mathfrak{G}$ überall dicht. Aus der Betrachtung der Q' folgt, daß das Gebilde s'-fach ausgedehnt ist; also ist $s = s'$.

Hält man jetzt alle Q und P außer Q_i fest und vermehrt Q_i um 1, so beschreibt der entsprechende Punkt des Phasenraumes eine geschlossene Kurve auf dem Gebilde $\mathfrak{G}$. Es müssen also $P'_1, \ldots, P'_n$, $Q'_{s+1}, \ldots, Q'_n$ festbleiben, während Q'_k $(k \leqq s)$ einen ganzzahligen Zuwachs α_{ik} erfährt. Die Funktion $C_k = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik} Q_i - Q'_k$ ist daher periodisch in $Q_1, \ldots, Q_s$ und als reguläre Funktion beschränkt. Da $\dot{C}_k = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik} \mathfrak{R}_i - \mathfrak{R}'_k$ zeitlich konstant ist, C_k aber nicht unbegrenzt anwachsen kann, ist $\dot{C}_k = 0$; C_k ist längs einer Bahnkurve, und da diese jedem Wertsysteme $Q_1, \ldots, Q_s$ bis auf ganze Zahlen beliebig nahe kommt, für alle $Q_1, \ldots, Q_s$ konstant: es ist

$$Q'_k = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik} Q_i + C_k.$$

Da dasselbe von der Umkehrung gilt:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{s} \beta_{ik} Q'_i + C'_k,$$

ist die Determinante $|\alpha_{ik}| = \pm 1$.

Das Bisherige gilt für überall dicht verteilte Wertsysteme $Q_{s+1}, \ldots, Q_n$, $P_1, \ldots, P_n$. Da die Q' stetig von den Q, P abhängen, sind die ganzen Zahlen α_{ik} überall dieselben. Führt man daher Q'', P'' ein durch die kanonische Transformation

$$Q''_k = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik} Q_i, \qquad P_i = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik} P''_k \qquad (i, k = 1, \ldots, s)$$

$$Q''_i = Q_i, \qquad P''_i = P_i \qquad (i = s+1, \ldots, n),$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} Q'_i &= Q''_i + \varphi_i(P''_1, \ldots, P''_n, Q''_{s+1}, \ldots, Q''_n) \\ P'_i &= \qquad \psi_i(P''_1, \ldots, P''_n, Q''_{s+1}, \ldots, Q''_n) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

*) Werke 3, 1 (Berlin 1899), S. 31f.

Damit dies eine kanonische Transformation ist, muß

$$\sum_{i=1}^{n}(P_i' dQ_i' - P_i'' dQ_i'') = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\psi_i - P_i'' + \sum_{l=1}^{n}\psi_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial Q_i''}\right) dQ_i'' + \sum_{l=1}^{n}\psi_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial P_i''} dP_i''\right]$$

ein vollständiges Differential sein. Es ist also

$$\frac{\partial}{\partial Q_k''}\left(\psi_i - P_i'' + \sum_{l=1}^{n}\psi_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial Q_i''}\right) = \frac{\partial}{\partial Q_i''}\left(\psi_k - P_k'' + \sum_{l=1}^{n}\psi_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial Q_k''}\right)$$

Ist $i \leqq s$, so bleibt nur

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial Q_k''} = 0,$$

d. h. $P_1', \ldots, P_s'$ hängen nur von den P'' ab. Weiter wird

$$\frac{\partial}{\partial P_k''}\left(\psi_i - P_i'' + \sum_{l=1}^{n}\psi_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial Q_i''}\right) = \frac{\partial}{\partial Q_i''}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial \varphi_l}{\partial P_k''},$$

d. h. für $i \leqq s$ ist $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial P_k''} = 1$ oder 0, je nachdem ob $i = k$ oder $i \neq k$ ist;

$$\psi_i = P_i'' + a_i,$$

worin a_i von keiner der Variablen Q'', P'' mehr abhängt. Man hat also

$$P_i = \sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}P_k'' = \sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}(P_k' - a_k),$$

woraus man sieht, daß die Quantenvorschrift ($\mathfrak{B}$) beim Übergange von Q, P zu Q', P' in eine Vorschrift derselben Form, nur natürlich mit anderen ganzen Zahlen n_i und anderen Werten $\overset{0}{P}$, übergeht, *daß also die Vorschrift* ($\mathfrak{B}$) *in der Tat vom Koordinatensystem unabhängig ist.*

§ 6.

Weitere Formulierungen der Quantenvorschrift.

Eine Formulierung der Quantenvorschrift, die auf kein besonderes Koordinatensystem Bezug nimmt, wurde von Einstein[9]) für zwei Freiheitsgrade gegeben. Für n Freiheitsgrade lautet sie (in einer Fassung, die dem Verfasser von Herrn Prof. Hilbert mitgeteilt wurde):

($\mathfrak{C}$) *Die statistisch ausgezeichneten Bewegungen sind diejenigen, die in Feldern des Jacobischen Prinzips verlaufen, deren Feldintegral S* (*die Lösung der Gleichung* (4)) *die folgende Eigenschaft hat: alle durch Fortsetzung im Reellen erreichbaren Zweige der vieldeutigen*

[9]) Ber. d. D. Phys. Ges. 1917, S. 82f.

(𝔈) *Funktion S entstehen aus endlich vielen durch Addition gewisser Konstanten, der Perioden, die ganze Vielfache des elementaren Wirkungsquantums sind.*

Auch diese Vorschrift ist nur da anwendbar, wo die von Schwarzschild ausreicht. Um sie nämlich anwenden zu können, wird man voraussetzen müssen, daß man eine vollständige Lösung S der Gleichung (4) hat, deren n Perioden voneinander unabhängige Funktionen der Parameter sind; denn sonst könnte man den Perioden nicht mit Sicherheit die Werte $n_i \cdot h$ beilegen. Unter diesen Voraussetzungen werden die Schlüsse des § 4 bis ins einzelne anwendbar. Man führt die Perioden als $P_1, \ldots, P_n$ an Stelle der Parameter in die Funktion S ein. Da S eine vollständige Lösung ist, ist die durch

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}$$

gegebene Transformation im kleinen umkehrbar. Genau wie in § 4 zeigt man, daß die q, p von den Q periodisch abhängen, und daß die Funktion H die Q nicht enthält. Damit ist die Vorschrift (𝔅) anwendbar, und wenn $P_i = 0$ die einzigen Singularitäten sind, sind auch die Konstanten $\overset{0}{P}_i$ festgelegt.

Auf die Vorschrift (𝔅) kommt man auch, wenn man nur weiß, daß das kinematische Bild der Bewegung das einer bedingt periodischen ist, d. h. daß die Koordinaten $q_1, \ldots, q_n$ und demzufolge auch die Impulse $p_1, \ldots, p_n$ periodische Funktionen (mit der Periode 1) von n linearen Funktionen $w_1, \ldots, w_n$ der Zeit sind, die jedes Wertsystem annehmen:

$$q_i = q_i(w_1, \ldots, w_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad p_i = p_i(w_1, \ldots, w_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$
$$w_i = \mathfrak{N}_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot t + \delta_i.$$

(Die Größen α und δ sind Integrationskonstante.) Es soll angenommen werden, daß kein entarteter Fall vorliegt, daß keine Gleichung von der Form (9) für alle Werte der α gilt.

Die Quantenvorschrift wird hier so ausgesprochen:

Statistisch ausgezeichnet sind die Bewegungen, für die

(𝔇) $$\Pi_i = \int_0^1 \sum_{l=1}^{n} p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_i} dw_i = n_i h$$

ist.

Durch Zurückführung auf den vorigen Fall soll bewiesen werden, daß die Größen Π_i, wenn sie voneinander unabhängig sind, in der Tat die kanonischen Variablen P_i vorstellen, die in der Vorschrift (𝔅) auftreten, wobei sich zugleich ergibt, daß die Π von den w nicht abhängen.

Das ist längst bekannt, z. B. erwähnt es Schwarzschild[8]); doch scheint in den vorliegenden Arbeiten kein Beweis dafür gegeben zu sein. Benutzt wird eine Überlegung, die bei Einstein[9]) angedeutet ist, aber einer wesentlichen Ergänzung bedarf. Hat man nämlich gezeigt, daß

$$\sum_{k=1}^{n} p_k\, dq_k = \sum_{k,l=1}^{n} p_k \frac{\partial q_k}{\partial w_l}\, dw_l$$

ein vollständiges Differential ist, so setzt man

$$dS = \sum_{k=1}^{n} p_k\, dq_k .$$

Führt man in S die q statt der w ein, so ist S eine Lösung der Gleichung (4); sie ist vollständig, weil die q und p alle Werte annehmen, und ist periodisch mit den n Perioden Π_i, die unabhängig sein müssen, damit die Vorschrift $(\mathfrak{D})$ angewandt werden kann. Damit $\Sigma p\, dq$ ein vollständiges Differential ist (und dies ist bei Einstein nicht bewiesen), müssen die Größen

$$\frac{\partial}{\partial w_i} \sum_{l=1}^{n} p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_k} - \frac{\partial}{\partial w_k} \sum_{l=1}^{n} p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_i} = \sum_{l} \left(\frac{\partial p_l}{\partial w_i} \frac{\partial q_l}{\partial w_k} - \frac{\partial p_l}{\partial w_k} \frac{\partial q_l}{\partial w_i} \right) = [w_k, w_i],$$

die Lagrangeschen Klammerausdrücke, verschwinden. Sie sind konstant längs jeder Bahnkurve; denn es ist

$$\frac{d}{dt}[w_k, w_i] = \sum_{l} \mathfrak{N}_l \frac{\partial}{\partial w_l}[w_k, w_i]$$

$$= \sum_{l,s} \mathfrak{N}_l \left(\frac{\partial^2 p_s}{\partial w_k \partial w_l} \frac{\partial q_s}{\partial w_i} - \frac{\partial^2 p_s}{\partial w_i \partial w_l} \frac{\partial q_s}{\partial w_k} + \frac{\partial p_s}{\partial w_k} \frac{\partial^2 q_s}{\partial w_i \partial w_l} - \frac{\partial p_s}{\partial w_i} \frac{\partial^2 q_s}{\partial w_k \partial w_l} \right).$$

Setzt man hier ein, was sich durch Differenzieren der Bewegungsgleichungen ergibt:

$$\sum_{l} \mathfrak{N}_l \frac{\partial q_i}{\partial w_l} = H_{p_i}, \qquad \sum_{l} \mathfrak{N}_l \frac{\partial p_i}{\partial w_l} = -H_{q_i},$$

$$\sum_{l} \mathfrak{N}_l \frac{\partial^2 q_i}{\partial w_l \partial w_s} = \sum_{l} \left(H_{p_i q_l} \frac{\partial q_l}{\partial w_s} + H_{p_i p_l} \frac{\partial p_l}{\partial w_s} \right),$$

$$\sum_{l} \mathfrak{N}_l \frac{\partial^2 p_i}{\partial w_l \partial w_s} = -\sum_{l} \left(H_{q_i q_l} \frac{\partial q_l}{\partial w_s} + H_{q_i p_l} \frac{\partial p_l}{\partial w_s} \right),$$

so hebt sich rechts alles weg. Die Klammern sind also konstant längs jeder Bahnkurve. Wenn keine Gleichung (9) besteht, müssen sie daher als stetige, periodische Funktionen der w überhaupt konstant sein; und da dies für überall dicht liegende Wertsysteme der α eintritt, ist es immer der Fall. Daher ist

$$[w_k, w_l] = \int_0^1 \int_0^1 [w_k, w_l]\, dw_l\, dw_k$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial w_l} \sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_k} - \frac{\partial}{\partial w_k} \sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_l} \right) dw_l\, dw_k$$

$$= \int_0^1 \sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_k}\, dw_k \Big|_{w_l=0}^{w_l=1} - \int_0^1 \sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial w_l}\, dw_l \Big|_{w_k=0}^{w_k=1},$$

und hier sind beide Glieder Null wegen der Periodizität der Integranden in w_l und w_k. Damit ist die Zurückführung auf den vorigen Fall und damit auf die Vorschrift ($\mathfrak{B}$) geleistet.

II. Allgemeine Quantenvorschrift. Eindeutige Integrale.

§ 7.

Die allgemeine Quantenvorschrift von Planck.

Planck hat[5]) eine Quantenvorschrift angegeben, die sehr allgemein gehalten ist und von gar keiner besonderen Eigenschaft des mechanischen Systems Gebrauch macht. Sie lautet:

Man bestimme eine Anzahl von Funktionen $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ der Koordinaten q und Impulse p und zerlege den Phasenraum durch die Hyperflächen

$$\begin{array}{ll} \Phi_1 = c_{11}, & \Phi_1 = c_{12}, \ldots \\ \Phi_2 = c_{21}, & \Phi_2 = c_{22}, \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \Phi_r = c_{r1}, & \Phi_r = c_{r2}, \ldots \end{array} \tag{$\mathfrak{C}$}$$

in Teilgebiete, die Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit. Statistisch ausgezeichnet sind diejenigen Bewegungen, die zugleich in je einer der Grenzflächen aus jeder der r Reihen verlaufen, d. h. für die

$$\Phi_i = c_{i n_i}$$

ist, worin $n_1, \ldots, n_r$ ganze Zahlen sind.

Dabei werden den Funktionen Φ und den Konstanten c noch zusätzliche Bedingungen auferlegt, die sich auf die Singularitäten und das Volumen des Phasenraumes beziehen. Doch soll hierauf nicht näher eingegangen werden.

Von den Grenzflächen $\Phi_i = c_{ik}$ wird verlangt, daß sie von keiner Bahnkurve des Systems geschnitten werden und daß jede Bahnkurve durch einen ihrer Punkte ganz in ihnen liegt, d. h. $\Phi_i = c_{ik}$ muß eine „relation invariante“

im Sinne von Poincaré[10]) sein. Praktisch wird man das aber selten behaupten können, wenn man nicht weiß, daß jede Fläche $\Phi_i = c$ mit beliebigem c diese Eigenschaft hat, d. h. daß Φ_i ein Integral der Bewegungsgleichungen ist, und so dürfte es auch bei Planck gemeint sein.

Nun kann man aber nicht jedes Integral zur Durchführung der Vorschrift ($\mathfrak{E}$) benutzen. Um erwarten zu dürfen, daß $\Phi = c$ eine reguläre Fläche darstellt, wird man verlangen, daß Φ in einem Gebiete, das alle Punkte $\Phi = c$ im Inneren enthält, eindeutig ist. So kommt man zu der Frage nach den in dem eben festgesetzten Sinne eindeutigen Integralen und vermutet, daß z. B. bei einem mechanischen Systeme, das, wie das beim Dreikörperproblem mit unbestimmter störender Masse der Fall ist, außer dem Energieintegral kein eindeutiges Integral hat, die Einteilung nach ($\mathfrak{E}$) nur mit diesem einen Integral bewirkt werden muß.

Ähnliche Folgerungen werden bei der Betrachtung der statistisch ausgezeichneten Bewegungen durch die Ergodenhypothese nahegelegt. Sie lautet in der Fassung, die hier zugrunde gelegt werden soll:

Sind $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ die einzigen eindeutigen Integrale des Systems, d. h. gibt es kein weiteres von ihnen unabhängiges, so gibt es eine Bahnkurve, die jedem Punkte des zusammenhängenden Gebietes $\Phi_1 = c_1, \ldots, \Phi_r = c_r$ beliebig nahe kommt, außer wenn das Wertsystem c_i einer gewissen Menge vom Maße Null angehört.

Hätte man nun eine ausgezeichnete Bewegung durch $\Phi_i = c_i$ und etwa eine zusätzliche Bedingung, eine „relation invariante" $\Psi_{r+1} = c_{r+1}$, so festgelegt, daß die Bahnkurve nicht jedem Punkte $\Phi_i = c_i$ beliebig nahekommt, so würde eine beliebig kleine Störung, d. h. Änderung der Anfangswerte der q, p, genügen, um zu bewirken, daß die Bahnkurve einem Punkte $\Phi_i = c_i$, von dem sie vorher stets um eine endliche Strecke entfernt blieb, so nahe kommt, wie man will. Eine auf diese Weise ausgezeichnete Bewegung würde also unstabil sein. Will man dies vermeiden, so muß man sich darauf beschränken, die statistisch ausgezeichneten Bewegungen dadurch festzulegen, daß man einer Anzahl eindeutiger Integrale bestimmte Werte erteilt.

§ 8.

Existenz zweier eindeutigen Integrale bei $n = 2$.

Hat das mechanische System zwei Freiheitsgrade und gibt es zwei unabhängige eindeutige Integrale, so läßt sich die Frage der Einteilung des Phasenraumes und der ausgezeichneten Bahnen mit Hilfe von topo-

[10]) Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1 (Paris 1892), S. 45f.

logischen Sätzen auf schon behandelte Fälle zurückführen, wenn man gewisse allgemeine Voraussetzungen über das Verhalten der Bahnkurven macht.

Die Bahnkurve durch einen Punkt des Phasenraumes liege ganz in einem im Endlichen gelegenen Gebiete $\mathfrak{G}$; ebenso jede Bahnkurve durch einen genügend benachbarten Punkt.

Sind nun $\Phi(q_1, q_2, p_1, p_2)$ und $\Psi(q_1, q_2, p_1, p_2)$ zwei unabhängige eindeutige Integrale, so sind nicht überall alle Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} \Phi_{q_1} & \Phi_{q_2} & \Phi_{p_1} & \Phi_{p_2} \\ \Psi_{q_1} & \Psi_{q_2} & \Psi_{p_1} & \Psi_{p_2} \end{pmatrix}$$

Null. Es wird vorausgesetzt, daß für ein Wertsystem (a, b) und demnach für jedes genügend benachbarte in keinem Punkte von $\mathfrak{G}$ mit $\Phi = a$, $\Psi = b$ alle diese Determinanten verschwinden; doch sollen Φ und Ψ diese Werte in einem Punkte von $\mathfrak{G}$ annehmen, durch den eine der oben erwähnten Bahnkurven geht. Dann bestimmen die Gleichungen $\Phi = a'$, $\Psi = b'$ für jedes Wertepaar (a', b'), das von (a, b) hinreichend wenig verschieden ist, eine in $\mathfrak{G}$ reguläre analytische Fläche $\mathfrak{F}$ (zweifach ausgedehntes Gebilde). Nimmt man noch an, daß auf $\mathfrak{F}$ kein Punkt $H_{q_1} = H_{q_2} = H_{p_1} = H_{p_2} = 0$ liegt — und das ist in der Tat so, wenn eines der Integrale Φ, Ψ mit H identisch ist —, so hat man in den Bahnkurven eine auf $\mathfrak{F}$ überall reguläre Kurvenschar, d. h. eine Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{F}$ läßt sich eineindeutig und stetig so auf eine Umgebung eines Punktes der Ebene abbilden, daß die Bahnkurven in parallele Grade übergehen.

Liegt $\mathfrak{F}$ ganz im Gebiete $\mathfrak{G}$, so muß sie als überall reguläre Fläche geschlossen sein. Projiziert man auf die q_1-q_2-Ebene, so hat man dort eine einparametrige Schar von Extremalen des Jacobischen Prinzips mit derselben Energiekonstanten, d. h. ein Feld. Das Feldintegral S, die Lösung von (4), ist gegeben durch $dS = p_1 dq_1 + p_2 dq_2$. Hier sind p_1, p_2 endlichvieldeutig, da die reguläre geschlossene Fläche $\mathfrak{F}$ nur mit endlich vielen Blättern über der q_1-q_2-Ebene liegen kann. Also ist S eine periodische Lösung, wie sie in § 6 behandelt wurde. Eine topologische Überlegung (vgl. Anhang) zeigt genauer, daß die Fläche $\mathfrak{F}$ eine einseitige oder zweiseitige Ringfläche ist und sich daher die Perioden der Funktion S aus einer oder zweien ganzzahlig linear zusammensetzen. Diese hätte man, sofern sie unabhängig sind, Vielfachen von h gleichzusetzen.

Erstreckt sich die Fläche $\mathfrak{F}$ aus dem Gebiete $\mathfrak{G}$ heraus, so kann durch eine endliche Anzahl regulärer Kurven ein ganz im Endlichen gelegenes Stück von $\mathfrak{F}$ begrenzt werden, das den in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Teil von $\mathfrak{F}$ enthält. Aus gewissen Voraussetzungen über die ganz in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Bahnkurven auf $\mathfrak{F}$ (sie sind im Anhang genau ausgesprochen und besagen

in ungenauer Ausdrucksweise, daß die in $\mathfrak{G}$ verlaufenden und die $\mathfrak{G}$ verlassenden Bahnkurven reinlich zu trennen sind) folgt, daß auf $\mathfrak{F}$ immer eine geschlossene Bahnkurve liegt. In der Umgebung $\mathfrak{U}$ eines Punktes des Phasenraumes, durch den eine solche geht, sollen als Koordinaten eingeführt werden: Φ, Ψ, und zwei weitere x und y, analytische Funktionen der q, p, von denen y ebenso wie Φ und Ψ längs jedes Bahnkurvenstückes in $\mathfrak{U}$ konstant ist. Die Bahnkurve $\Phi = a$, $\Psi = b$, $y = 0$ sei geschlossen. Verfolgt man sie, bis sie wieder in $\mathfrak{U}$ eintritt, so ist auf ihr wieder $\Phi = a$, $\Psi = b$, $y = 0$. Verfolgt man eine andere Bahnkurve, so müssen zwar Φ und Ψ, als im gesamten Phasenraume eindeutig, beim k-ten Wiedereintritt in $\mathfrak{U}$ dieselben Werte haben, dagegen wird im allgemeinen y einen anderen Wert y_k annehmen. Die Differenz $y_k - y$ ist eine reguläre Funktion der Argumente Φ, Ψ, y, und ihre Nullstellen geben die periodischen Lösungen, die geschlossenen Bahnkurven.

Unter den analytischen Flächen $y_k - y = 0$ im Raume der Φ, Ψ, y hat mindestens eine einen reellen Mantel, auf dem Φ und Ψ voneinander unabhängig sind. Denn sonst bestände die Gesamtheit der reellen Werte Φ, Ψ, für die in $\mathfrak{U}$ $y_k - y = 0$ ist, aus abzählbar unendlich vielen Punkten und analytischen Kurvenstücken. Da man ganz $\mathfrak{F}$ mit endlich vielen Gebieten $\mathfrak{U}$ bedecken kann, würde dasselbe von der Gesamtheit der Werte Φ, Ψ gelten, für die es überhaupt geschlossene Bahnen in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{F}$ gibt. Diese Gesamtheit hätte also das Maß Null, während es doch für jedes Wertepaar in der Umgebung von $\Phi = a$, $\Psi = b$ geschlossene Bahnen geben mußte. Es kann also ein Teil einer Fläche $y_k - y = 0$ dargestellt werden durch

$$y = Y(\Phi, \Psi),$$

wo die Funktion Y in einem gewissen Bereiche regulär ist. Man darf annehmen, daß für $y > Y$ auch $y_k > Y$ ist; denn sonst würde y_{2k} das Gewünschte leisten. Da $y_k - y$ eine nicht identisch verschwindende reguläre Funktion ist, die für $y = Y$ Null wird, gibt es ein Gebiet

$$0 < y - Y \leqq \varepsilon, \quad |\Phi - a| \leqq \varepsilon, \quad |\Psi - b| \leqq \varepsilon, \quad x = 0,$$

in dem etwa $y_k - y < 0$ ist. (Sollte statt dessen $y_k - y > 0$ sein, so ist bei der folgenden Betrachtung nur t durch $-t$ zu ersetzen.) Man verfolge die Bahnkurven von den Punkten dieses Gebietes bis zum k-ten Wiedereintritt in $\mathfrak{U}$ und zwar bis zum Schnitte mit $x = 0$.

Geht man von jedem Punkte der genannten Kurvenstücke zu dem, den er innerhalb der Zeit $T (> 0)$ erreicht, so erhält man eine Teilmenge von geringerem Inhalt. Denn die beschriebene Menge enthält mit jedem Punkte auch den Teil der Bahnkurve durch ihn, die er für positive Zeiten

durchläuft, und in der zweiten Menge sind die Punkte $x = \delta$, $y = Y + \varepsilon - \delta$ mit genügend kleinem $\delta > 0$ nicht enthalten. Dies Ergebnis steht aber im Widerspruche mit der Tatsache, daß der Inhalt des Phasenraumes eine Integralinvariante ist, und es bleibt nur übrig, daß jede Bahnkurve geschlossen ist. Im ganzen ergibt sich also:

Hat ein System von zwei Freiheitsgraden außer dem Energieintegral noch ein eindeutiges Integral, und gibt es für jedes Wertepaar, das man diesen Integralen beilegt, eine Bahnkurve, die ganz im Endlichen verläuft und gewisse Voraussetzungen erfüllt (*vgl. Anhang*), *so wird man entweder auf den Fall periodischer Felder* (§ 6) *geführt, oder sämtliche Bewegungen sind periodisch.*

§ 9.

Anschluß an ein bedingt periodisches System.

Bei einem mechanischen System, dessen Bedingungen analytisch von einem Parameter μ abhängen, und das für $\mu = 0$ in ein bedingt periodisches übergeht, sollen die eindeutigen Integrale mit Hilfe von Reihenentwicklungen verfolgt werden, die sich bei Poincaré[11]) finden.

Ist in dem ursprünglichen Variationsprinzip (1)

$$L = L_0 + \mu L_1 + \mu^2 L_2 + \ldots$$

eine Reihe die für kleine μ im Gültigkeitsgebiete konvergiert, und hängen $L_1, L_2, \ldots$ nicht von den $\dot{q}$, sondern nur von den q ab, so ist jedes für $\mu = 0$ kanonische Koordinatensystem auch für $\mu \neq 0$ kanonisch. (Diese besondere Art der Abhängigkeit von μ ist in der Praxis die wichtigste: von dieser Art ist z. B. das astronomische Dreikörperproblem oder ein System, wie ein Atommodell, auf das man ein elektrisches Feld wirken läßt.) Ist das System für $\mu = 0$ bedingt periodisch, so führt man die Winkelvariablen ein und hat:

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \ldots,$$

worin H_0 nur von $P_1, \ldots, P_s$ und $H_1, H_2, \ldots$ von den Q periodisch abhängen.

Soll nun ein eindeutiges Integral $\Phi(Q, P, \mu)$, das analytisch von μ und periodisch von den Q abhängt, zur Ausführung der Quantenvorschrift benutzt werden, so ist zu verlangen, daß es für $\mu = 0$ in eines der sonst benutzten $P_1, \ldots, P_s$ übergeht; es sei etwa $\Phi(Q, P, 0) = P_1$. Damit Φ ein Integral ist, ist notwendig und hinreichend, daß der Poissonsche Klammerausdruck

$$(H, \Phi) = \sum_{k=1}^{s} (H_{Q_k} \Phi_{P_k} - H_{P_k} \Phi_{Q_k})$$

[11]) a. a. O. [10]) Chap. V.

überall verschwindet. Man entwickelt H und Φ in Reihen, die nach Potenzen von μ und trigonometrischen Funktionen der Q fortschreiten, und deren Koeffizienten in dem gemeinsamen Regularitätsgebiet von H und Φ reguläre Funktionen der P sein müssen:

$$(10)\quad \begin{aligned} H &= H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \dots \\ H_r &= \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{+\infty} A^{(r)}_{(m_1,\dots,m_n)} e^{2\pi\sqrt{-1}(m_1 Q_1 + \dots + m_n Q_n)} \\ &= \sum_{(m)} A^{(r)}_{(m)} \zeta_{(m)} \qquad (r = 1, 2, \dots) \\ \Phi &= \Phi_0 + \mu \Phi_1 + \mu^2 \Phi_2 + \dots \\ \Phi_0 &= P_1, \quad \Phi_r = \sum_{(m)} G^{(r)}_{(m)} \zeta_{(m)} \qquad (r = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Es handelt sich darum, aus der Bedingung

$$\begin{aligned} (H, \Phi) = (H_0, \Phi_0) &+ \mu\{(H_0, \Phi_1) + (H_1, \Phi_0)\} \\ &+ \mu^2\{(H_0, \Phi_2) + (H_1, \Phi_1) + (H_2, \Phi_0)\} + \dots = 0 \end{aligned}$$

die Abhängigkeit der gesuchten Koeffizienten G von den bekannten A zu erhalten. Von selbst ist

$$(H_0, \Phi_0) = (H_0, P_1) = 0.$$

Die Glieder erster Ordnung in μ geben

$$(H_0, \Phi_1) + (H_1, \Phi_0) = 2\pi\sqrt{-1} \cdot \sum_{(m)} \Big\{ -\sum_{k=1}^{n} m_k \mathfrak{N}_k \cdot G^{(1)}_{(m)} + m_1 A^{(1)}_{(m)} \Big\} \zeta_{(m)},$$

oder, da alle Koeffizienten der trigonometrischen Reihe Null sein müssen:

$$G^{(1)}_{(m)} \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k \mathfrak{N}_k = m_1 A^{(1)}_{(m)}.$$

Man sieht: in dem Gebiete der P, in dem H und Φ regulär sind, muß $m_1 A^{(1)}_{(m)}$ überall da verschwinden, wo $\sum_{k=1}^{n} m_k \mathfrak{N}_k$ verschwindet. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so können die Wertsysteme der P, für die $\Sigma\, m_k \mathfrak{N}_k = 0$ ist, nicht zum Regularitätsgebiete des Integrals Φ gehören. Kann man beweisen, wie es Poincaré beim Dreikörperproblem getan hat, daß solche Werte (für die verschiedenen Indexsysteme (m)) überall dicht liegen, so weiß man, daß es ein Integral Φ nicht gibt. Jedenfalls sind die Koeffizienten G eindeutig bestimmt bis auf die, bei denen nur diejenigen Indizes $m_{s+1}, \dots, m_n$ von Null verschieden sind, die zu den identisch verschwindenden mittleren Bewegungen $\mathfrak{N}_{s+1}, \dots, \mathfrak{N}_n$ gehören; denn wie vorher ist angenommen, daß zwischen $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_s$ keine lineare Gleichung (9) identisch besteht.

Die Glieder zweiter Ordnung in μ liefern:

$$2\pi\sqrt{-1}\sum_{(m)}\sum_{k=1}^{n} m_k \mathfrak{N}_k G^{(2)}_{(m)} \zeta_{(m)}$$
$$+ 2\pi\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{(m)}\frac{\partial A^{(1)}_{(m)}}{\partial P_k}\zeta_{(m)}\cdot\sum_{(m)} m_k G^{(1)}_{(m)}\zeta_{(m)} - \sum_{(m)} m_k A^{(1)}_{(m)}\zeta_{(m)}\cdot\sum_{(m)}\frac{\partial G^{(1)}_{(m)}}{\partial P_k}\zeta_{(m)}\right\}$$
$$- 2\pi\sqrt{-1}\sum_{(m)} m_1 A^{(2)}_{(m)}\zeta_{(m)} = 0,$$

$$G^{(2)}_{(m)}\cdot\sum_{k=1}^{n} m_k \mathfrak{N}_k = m_1 A^{(2)}_{(m)} - \sum_{(m')+(m'')=(m)}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A^{(1)}_{(m')}}{\partial P_k} m_k'' G^{(1)}_{(m'')} - \sum_{k=1}^{n} m_k' A^{(1)}_{(m')}\frac{\partial G^{(1)}_{(m'')}}{\partial P_k}\right\}.$$

Die unendlichen Summen durften dabei gliedweise multipliziert und umgeordnet werden, da sie als Fouriersche Reihen regulärer Funktionen absolut konvergieren.

Man sieht schon an diesen Formeln für die Koeffizienten $G^{(1)}$ und $G^{(2)}$, was allgemein eintritt. (Die allgemeinen Formeln sollen nicht aufgeschrieben werden, da sie doch keine tiefere Einsicht vermitteln.) Aus der Formel für $G^{(r)}_{(m)}$ folgt, daß die rechte Seite, ein Ausdruck, der den Koeffizienten $A^{(r)}_{(m)}$ und die unendlich vielen Koeffizienten $A^{(1)}_{(m')}, \ldots, A^{(r-1)}_{(m')}$ mit beliebigen m' enthält, im Regularitätsgebiete überall da verschwinden muß, wo $\sum_k m_k \mathfrak{N}_k$ verschwindet. Weiß man aber selbst, daß dies zutrifft (man weiß es, wenn die Verhältnisse der mittleren Bewegungen $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n$ konstant sind und keine Gleichung (9) zwischen ihnen gilt), so ist damit für die Existenz eines Integrales Φ noch wenig gewonnen; denn die Konvergenz der Potenzreihe in μ mit den so verwickelt gebauten Koeffizienten müßte erst bewiesen werden.

Immerhin läßt sich das Folgende aussagen. Die Koeffizienten $G^{(r)}_{(m)}$ werden eindeutig bestimmt, bis auf die, bei welchen $m_1 = \ldots = m_s = 0$ ist. Hat man also ein Integral Φ, so kann man diese Koeffizienten um so kleine Beträge ändern, daß die Konvergenz der Reihe erhalten bleibt, und erhält so ein anderes Integral, das auch für $\mu = 0$ in ein P übergeht.

Diese Unbestimmtheit kann durch Anwendung der Adiabatenhypothese von P. Ehrenfest [12]) behoben werden. Sie lautet bekanntlich:

Quantentheoretisch erlaubte Zustände gehen bei adiabatischer Beeinflussung in quantentheoretische erlaubte Zustände über.

Setzt man die Existenz der eindeutigen Integrale voraus, so kann man hieraus Folgerungen ziehen, ohne den Begriff „adiabatisch" zu benutzen, der erst mathematisch zu fassen wäre. Wird nämlich μ zeitlich

---

[12]) Ann. d. Phys. (4), 52 (1916).

geändert, geht aber die Bewegung während dessen gemäß den Bewegungsgleichungen vor sich, so ist:

$$\dot{\Phi} = \sum_{l=0}^{\infty} (\mu^l \dot{\Phi}_l + l\mu^{l-1} \dot{\mu}\, \Phi_l) = \dot{\mu} \sum_{l=0}^{\infty} l \mu^{l-1} \Phi_l .$$

Ist nun für $\mu = 0$ die Quantenvorschrift durch $P_1 = n_1 h$ gegeben, so wird man allgemein $\Phi = n_1 h$ verlangen und ansetzen

$$\sum_{l=1}^{\infty} l \mu^{l-1} \Phi_l = 0 .$$

Ob dies allgemein erfüllt werden kann, ist nicht sicher. Erfüllt werden kann aber die Forderung, daß $\dot{\Psi} = 0$ ist im Mittel für alle Zustände mit den gegebenen Werten $P_1, \ldots, P_n, Q_{s+1}, \ldots, Q_n$, d. h. daß

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \dot{\Psi} dQ_1 \ldots dQ_s = \frac{d}{dt} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \Psi dQ_1 \ldots dQ_s = 0$$

ist. Setzt man nämlich

$$\Psi = \Phi - \int_0^1 \ldots \int_0^1 \Phi dQ_1 \ldots dQ_s ,$$

so ist die Differenz $\Phi - \Psi$ von den einzigen zeitlich veränderlichen Größen $Q_1, \ldots, Q_s$ unabhängig; Ψ ist ebenfalls ein Integral, wenn man μ festhält. Bei veränderlichem μ dagegen ist offenbar die obige Forderung erfüllt. Stellt man die Reihenentwicklung (10) für Ψ auf, so sieht man, daß die Koeffizienten $G^{(r)}_{(m)}$ dieselben sind wie bei Φ, bis auf die mit $m_1 = m_2 = \ldots = m_s = 0$, die sämtlich verschwinden. Gerade diese Koeffizienten waren unbestimmt geblieben und sind nunmehr festgelegt. Dadurch wird die Konvergenz nicht gestört; denn Ψ ist regulär, wenn es Φ ist.

Man hat demnach die folgende Quantenvorschrift:

Man bilde die Reihe (10) *und die entsprechenden mit* $P_2, \ldots, P_s$ *statt* P_1 *und setze die unbestimmten Koeffizienten gleich Null. Wenn diese Reihen in einem Gebiete gleichmäßig konvergieren, stellen sie dort Integrale dar. Diese Integrale setze man gleich Vielfachen von* h.

Anhang.

Topologische Hilfssätze.

Der eine topologische Hilfssatz aus § 8 hieß:

Eine geschlossene Fläche, auf der eine überall reguläre Kurvenschar liegt, ist eine ein- oder zweiseitige Ringfläche.

Man lege auf der Fläche eine Anzahl q von Kurvenstücken, die „Querstücke", die nirgends eine Scharkurve berühren, derart daß jedes

Stück einer Scharkurve, dessen Länge eine gegebene Schranke überschreitet, mindestens ein Querstück trifft. (Die genauere Beschreibung dieser Konstruktion würde zu weit führen und bietet keine Schwierigkeiten.) Zwei auf einer Scharkurve aufeinander folgende Schnitte mit Querstücken sollen verschiedenen Querstücken angehören; und legt man die Scharkurve durch einen Endpunkt eines Querstücks, so sollen die beiderseits benachbarten Schnitte mit Querstücken nicht an den Enden liegen. Man ziehe von jedem Ende eines Querstücks die Scharkurve nach beiden Seiten bis zum nächsten Schnitte mit einem Querstück und wende auf die durch diese Scharkurvenstücke und die Querstücke bewirkte Einteilung die Eulersche Polyederformel an. Ecken sind die $2q$ Endpunkte der Querstücke und die $4q$ Endpunkte der von dort ausgehenden Scharkurvenstücke. Kanten sind zunächst die q Querstücke. Durch jeden Endpunkt der $4q$ Scharkurvenstücke wird ein Querstück geteilt, die Kantenzahl um 1 vermehrt. Dazu kommen noch die $4q$ Scharkurvenstücke selbst; das macht $9q$ Kanten. An jedem Querstück liegen zunächst zwei Flächen $(2q)$. Durch jedes Scharkurvenstück wird die Zahl um eins vermehrt; das macht $6q$. So ist aber jede Fläche doppelt gezählt: es bleiben $3q$. Die Eulersche Formel ergibt:

$$6q - 9q + 3q = 0,$$

d. h. die Fläche ist eine ein- oder zweiseitige Ringfläche.

Der zweite Hilfssatz behauptet die Existenz einer geschlossenen Scharkurve in einer überall regulären Kurvenschar auf einer regulären berandeten Fläche. Vorausgesetzt wird dabei die Existenz einer Scharkurve oder einer Menge von Scharkurven $\mathfrak{C}$, deren Entfernung vom Rande immer über einer positiven Schranke bleibt und die die folgenden Eigenschaften hat. Nennt man die Punkte P erreichbar, die mit einem Randpunkte durch eine Kurve verbunden werden können, die außer etwa P keinen Punkt oder Häufungspunkt von $\mathfrak{C}$ enthält, so soll sich um jeden inneren Punkt Q der Fläche eine Umgebung $\mathfrak{U}$ (das topologische Bild einer Kreisscheibe $\mathfrak{U}'$, deren Mittelpunkt Q entspricht) angeben lassen, so daß einer der folgenden Fälle eintritt:

1. Kein Punkt von $\mathfrak{U}$ ist erreichbar.
2. Jeder Punkt von $\mathfrak{U}$ ist erreichbar; kein Punkt von $\mathfrak{U}$ gehört zu $\mathfrak{C}$.
3. Jeder Punkt von $\mathfrak{U}$ ist erreichbar; in $\mathfrak{U}$ gehören zu $\mathfrak{C}$ nur die Punkte des Scharkurvenstückes durch Q, das einem Durchmesser von $\mathfrak{U}'$ entspricht.
4. Das Scharkurvenstück durch Q, Bild eines Durchmessers von $\mathfrak{U}'$, teilt $\mathfrak{U}$ in zwei Teile, deren einer erreichbar, deren anderer unerreichbar ist.

Konstruiert man noch zu jedem Randpunkte R eine „Halbumgebung", d. h. das topologische Bild eines Halbkreises, dessen Mittelpunkt R, dessen begrenzender Durchmesser einem Stück der Randkurve entspricht und deren sämtliche Punkte erreichbar sind (das geht, nach der ersten Voraussetzung), so läßt sich die Fläche mit endlich vielen dieser Umgebungen $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_r$ bedecken. Gibt es unerreichbare Punkte, so sei Y ein Grenzpunkt, d. h. gemeinsamer Häufungspunkt erreichbarer und unerreichbarer Punkte. Man sieht leicht, daß jeder Punkt der Scharkurve durch Y auch Grenzpunkt ist. Eine der Umgebungen $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_r$ enthält Y; sie ist vom Typus 4 und heiße $\mathfrak{B}'$. Der Austrittspunkt der Scharkurve durch Y ist in einer weiteren Umgebung $\mathfrak{B}''$ enthalten, die wieder vom Typus 4 ist. Fährt man so fort, so erhält man eine endliche Anzahl von Umgebungen $\mathfrak{B}$ vom Typus 4 derart, daß sich die in ihnen liegenden Grenzkurvenstücke überdecken, so daß kein Ende unbedeckt bleibt: man hat eine geschlossene Kurve, die der Schar angehört.

Sind alle Punkte erreichbar, so nimmt man einen Punkt von $\mathfrak{C}$. Die ihn enthaltende Umgebung $\mathfrak{B}$ ist vom Typus 3. Durch Anwendung desselben Verfahrens auf die Gebiete $\mathfrak{B}$ vom Typus 3 erhält man wieder eine geschlossene Scharkurve.

(Eingegangen am 22. 7. 1921.)

Über die Singularitäten algebraischer Gebilde.

(Zweite Abhandlung.)

Von

Werner Schmeidler in Breslau.

Einleitung.

Als Fortsetzung meiner gleichbetitelten Arbeit (Mathematische Annalen **81**, S. 223–234)[1]) verfolgen die nachfolgenden Zeilen insbesondere den Fall der *ebenen Kurven* und im Anschluß daran den der *eingliedrigen Moduln mit endlicher Singularitätengruppe* weiter. Das Hauptresultat für Kurven ist der Satz, daß die von M. Noether studierten Vielfachheitsanzahlen, die für den gegebenen singulären Punkt vermöge quadratischer Cremonatransformationen definiert werden[2]) und für viele Eigenschaften der Kurven (Reduktion des Geschlechtes durch eine Singularität, Bestimmung der Schnittpunktsmultiplizität zweier Kurven usw.) von Wichtigkeit sind, auch durch die *Restgruppe der Kurve* bestimmt sind und demgemäß (Satz I) bei umkehrbar ganzen rationalen Transformationen erhalten bleiben. Dieses Resultat erläutert die Bedeutung des Begriffes der Restgruppe, die ja für ganz allgemeine Moduln definiert ist, indem es zeigt, was im Spezialfalle darin enthalten ist. Überdies zeigt sich, daß die Restgruppe sogar eine tiefere Charakteristik der Singularitäten liefert als die Noetherschen Zahlen, da man Beispiele angeben kann, bei denen die Noetherschen Zahlen übereinstimmen, die Singularitätengruppen aber nicht, noch weniger also (Satz III) die Restgruppen.

Aber noch in einer andern Hinsicht werden die Untersuchungen für ebene Kurven verschärft: Der Auflösung des singulären Punktes in eine Reihe von „benachbarten" Punkten, deren Vielfachheiten die „Zusammensetzung" des singulären Punktes definieren, tritt hier eine Auflösung des

[1]) Wir zitieren die Sätze dieser Arbeit einfach mit den dortigen Nummern.

[2]) Vgl. z. B. Math. Ann. **9**, S. 166–182; **23**, S. 311–380.

zugehörigen Bestandteils der *Singularitätengruppe* in eine Kette von zugeordneten Singularitätengruppen an die Seite, deren jede die Vielfachheit des zugehörigen benachbarten Punktes liefert.

Im zweiten Abschnitt werden diese Resultate auf den Fall eines beliebigen eingliedrigen Moduls mit endlicher Singularitätengruppe, also z. B. einer Fläche mit endlich vielen singulären Punkten, verallgemeinert. Weitere Verallgemeinerungen seien für eine spätere Gelegenheit vorbehalten.

Eine prinzipielle Bemerkung zum Schluß: Die Theorie der Restgruppen, wie sie hier entwickelt wird, bedeutet, wie z. B. Satz I zeigt, eine Bevorzugung der *ganzen* vor den allgemeinen rationalen Funktionen; sie gehört in eine *affin*-rationale Geometrie, und im engsten Zusammenhange damit steht die Bevorzugung der unhomogenen Schreibweise. Es liegt nahe, zu fragen, ob nicht auch hier wie sonst meistens in der Geometrie die *projektive* Auffassung und damit im Zusammenhang die *homogene* Schreibweise weiter führen würde. Diese Frage ist aber zu verneinen. Beschränken wir uns nämlich auf solche Moduln, die keine linearen Formen enthalten, d. h. auf solche Gebilde, die nicht in einem linearen Unterraum von weniger Dimensionen liegen, so ergibt sich aus Satz I unschwer folgendes: *Zwei homogene Moduln derselben Variablenzahl haben dann und nur dann isomorphe Restgruppen, wenn sie linear verwandt sind.* Dieses Resultat ist gewiß nicht uninteressant, insofern es zeigt, daß auch die gewöhnliche *projektive Geometrie* in das Studium der Restgruppen eingeordnet werden kann. Wir kommen aber so zu keiner *rationalen* Geometrie, und darin liegt eine Rechtfertigung für die Beibehaltung des Unhomogenen.

I. Abschnitt.

Ebene Kurven.

§ 1.

Die Auflösung zweier Singularitäten mit isomorpher Singularitätengruppe.

Es seien $F(x, y) = 0$ und $G(z, t) = 0$ zwei irreduzible oder wenigstens von mehrfachen Bestandteilen freie Kurven, deren Singularitätengruppen isomorph sind. Nach Satz I bestehen dann Relationen der Form:

$$(1)\quad F(h,k) = AG + B\frac{\partial G}{\partial z} + C\frac{\partial G}{\partial t}, \quad G(f,g) = AF + B\frac{\partial F}{\partial x} + \Gamma\frac{\partial F}{\partial y},$$

$$(2)\quad \frac{\partial F}{\partial x}(h,k) = A'G + B'\frac{\partial G}{\partial z} + C'\frac{\partial G}{\partial t}, \quad \frac{\partial G}{\partial z}(f,g) = A'F + B'\frac{\partial F}{\partial x} + \Gamma'\frac{\partial F}{\partial y},$$

$$(3)\quad \frac{\partial F}{\partial y}(h,k) = A''G + B''\frac{\partial G}{\partial z} + C''\frac{\partial G}{\partial t}, \quad \frac{\partial G}{\partial t}(f,g) = A''F + B''\frac{\partial F}{\partial x} + \Gamma''\frac{\partial F}{\partial y},$$

$$(4)\quad \left.\begin{aligned} f(h,k) &\equiv z \\ g(h,k) &\equiv t \end{aligned}\right\}(\mathfrak{N}), \qquad \left.\begin{aligned} h(f,g) &\equiv x \\ k(f,g) &\equiv y \end{aligned}\right\}(\mathfrak{M}).$$

Hierbei ist $\mathfrak{M} = \left(F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$, $\mathfrak{N} = \left(G, \frac{\partial G}{\partial z}, \frac{\partial G}{\partial t}\right)$, und f, g sind Polynome in x, y und h, k Polynome in z, t, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Gestalt

$$(5)\qquad \begin{aligned} f &= x + (2), & h &= z + (2), \\ g &= y + (2), & k &= t + (2) \end{aligned}$$

annehmen können. Es ist ferner keine Besonderheit, wenn wir annehmen, daß die Nullpunkte der (x, y)-Ebene mit der (z, t)-Ebene einander zugeordnete Singularitäten sind, die dann beide die gemeinsame Vielfachheit (vgl. Satz V) $r \geqq 2$ haben mögen. *Wir denken uns die Achsen in beiden Ebenen so gelegt, daß weder auf $x = 0$ noch auf $z = 0$ ein vom Nullpunkt verschiedener singulärer Punkt von F bzw. G liegt.* Außerdem sei weder $x = 0$ noch $z = 0$ Tangente im Nullpunkte.

Die Auflösung der Singularität $x = y = 0$ nach Noether geschieht dann in der Weise, daß man die Substitution

$$(6)\qquad \begin{aligned} x &= x_1, \\ y &= (c + y_1)\, x_1 \end{aligned}$$

auf $F(x, y)$ ausübt und eine Bildkurve $F_1(x_1, y_1) = 0$ erhält, so daß

$$(7)\qquad F(x_1, (c + y_1)\, x_1) = x_1^r\, F_1(x_1, y_1)$$

wird. Dies liefert weiterhin

$$(8)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, (c + y_1)\, x_1) = r\, x_1^{r-1} F_1 + x_1^r \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - (c + y_1)\, x_1^{r-1} \frac{\partial F_1}{\partial y_1},$$

$$(9)\qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, (c + y_1)\, x_1) = x_1^{r-1} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}.$$

Die Konstante c ist dabei an sich willkürlich, von Interesse ist indessen nur der Fall, daß $y - cx$ ein Linearfaktor der Unterform von F ist. Handelt es sich um einen einfachen Linearfaktor, so ist der Punkt $x_1 = y_1 = 0$ ein regulärer Punkt der Kurve $F_1 = 0$, die auf diesen Linearfaktor bezügliche Auflösung der Singularität ist schon mit dem ersten Schritt vollendet. Im allgemeinen wird $x_1 = y_1 = 0$ für $F_1 = 0$ eine Singularität einer gewissen Vielfachheit $r_1 \leqq r$ sein, die ihrerseits wieder zu neuen Bildkurven Anlaß gibt, und so fort.

Der wesentliche Gedanke ist nun, daß wir neben den sukzessiven Vielfachheiten $r_1, r_2, \ldots$ sogleich auch die *Singularitätengruppen* der Bildkurven $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots$ in Betracht ziehen. Auf diese Weise erhalten wir eine (übrigens *endliche*) Kette von Singularitätengruppen, die der Auflösung der Singularität $x = y = 0$ von $F = 0$ zugeordnet ist. Bevorzugt man auf der ersten oder irgendeiner späteren Stufe einen anderen Linearfaktor

der betreffenden Unterform, so entsteht eine andere Kette; im ganzen erhält man auf diese Weise nur endlich viele wesentlich verschiedene Ketten von je endlich vielen „abgeleiteten" Singularitätengruppen.

Ganz analog verfahren wir jetzt in der (z, t)-Ebene mit $G = 0$. *Wie verhalten sich die beiden Mengen von abgeleiteten Singularitätengruppen zueinander, die wir so erhalten?* Wir werden sehen, daß wir unter etwas schärferen Voraussetzungen als den bisher genannten nachweisen können, *daß sie aus beziehungsweise isomorphen Gruppen bestehen.* In erster Linie werden wir demnach die Isomorphie der Restgruppen von $\mathfrak{M}_1 = \left(F_1, \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)$ und $\mathfrak{N}_1 = \left(G_1, \frac{\partial G_1}{\partial z_1}, \frac{\partial G_1}{\partial t_1}\right)$ nachzuweisen haben, wobei F_1 und G_1 zwei Bildkurven erster Stufe bedeuten, die aus zwei einander entsprechenden Linearfaktoren (vgl. Satz V, Folgerung) der Unterformen $F^{(r)}$ und $G^{(r)}$ von F und G in der obigen Weise hervorgegangen sind. Wir nehmen dabei zunächst an, daß die Exponenten der beiden Linearfaktoren > 1 seien; dann gehen sie bei unseren Annahmen vermöge der Substitution $x = z$, $y = t$ ineinander über. Den Fall einfacher Faktoren werden wir später behandeln.

Den Nachweis der Isomorphie führen wir wiederum mit Hilfe von Satz I; die erste Aufgabe ist daher die Herstellung von Übergangspolynomen $f_1(x_1, y_1)$, $g_1(x_1, y_1)$, $h_1(z_1, t_1)$, $k_1(z_1, t_1)$. Zur Vereinfachung der Formeln nehmen wir in (6) bis (9) die Konstante $c = 0$, worin keine Beschränkung der Allgemeinheit liegt. Die zu (6) entsprechende Substitution lautet dann

$$(10) \qquad z = z_1, \qquad t = z_1 t_1.$$

Wir definieren nun

$$(11) \quad f_1(x_1, y_1) = f(x_1, x_1 y_1) = x_1 \bar{f}(x_1, y_1), \quad g(x_1, x_1 y_1) = x_1 \bar{g}(x_1, y_1),$$

$$(12) \quad h_1(z_1, t_1) = h(z_1, z_1 t_1) = z_1 \bar{h}(z_1, t_1), \quad k(z_1, z_1 t_1) = z_1 \bar{k}(z_1, t_1),$$

und suchen ein Polynom $g_1(x_1, y_1)$, das der Kongruenz

$$(13) \qquad \bar{g} \equiv g_1 \bar{f} \quad (x_1^{\varkappa} \mathfrak{M}_1)$$

genügt; dabei bedeutet $\varkappa$ einen noch festzulegenden Exponenten. Diese Kongruenz ist lösbar für jedes $\varkappa$; denn wegen (5) ist $\bar{f} = 1 + x_1 \bar{f}'$ und daher für jede Nullstelle von $\bar{f}$ der Wert von $x_1 \neq 0$. Hätte also $\bar{f}$ eine Nullstelle mit $x_1^{\varkappa} \mathfrak{M}_1$ gemeinsam, so wäre dies auch eine Nullstelle von $\mathfrak{M}_1$. Dann wäre wegen (7), (8), (9) und wegen (1), (2), (3) und (11)

$$G(0, g) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial z}(0, g) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t}(0, g) = 0,$$

wobei $g = g(x_1, x_1 y_1)$ für das betreffende Wertsystem (x_1, y_1) zu be-

rechnen ist. Aus unserer Annahme, daß der Nullpunkt die einzige Singularität von G auf $z = 0$ ist, folgt dann $g = 0$; dies steht aber mit (4) im Widerspruch, weil $h(0, 0) = 0$ und andererseits $x = x_1 \neq 0$ ist. Aus diesen Gründen ist $(z_1^{\varkappa}\mathfrak{M}_1, \bar{f})$ der Einheitsmodul, und daher ist die Kongruenz (13) lösbar.

Genau entsprechend bestimmen wir $k_1(z_1, t_1)$ mit Hilfe der Kongruenz

$$\bar{k} \equiv k_1 \bar{h} \qquad (z_1^{\varkappa}\mathfrak{N}_1). \tag{14}$$

Für die so bestimmten Polynome f_1, g_1, h_1, k_1 behaupten wir nun, wenn $\varkappa \geqq r - 1$ gewählt wird, zunächst die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} &(15)\quad \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(h_1, k_1) \equiv 0 \\ &(16)\quad z_1 F_1(h_1, k_1) \equiv 0 \\ &(17)\quad z_1^2 \frac{\partial F_1}{\partial z_1}(h_1, k_1) \equiv 0 \end{aligned}\right\}(\mathfrak{N}_1), \qquad \left.\begin{aligned} &\frac{\partial G_1}{\partial t_1}(f_1, g_1) \equiv 0 \\ &z_1 G_1(f_1, g_1) \equiv 0 \\ &z_1^2 \frac{\partial G_1}{\partial z_1}(f_1, g_1) \equiv 0 \end{aligned}\right\}(\mathfrak{M}_1).$$

Zum Beweise von (15) führen wir in (3) die Substitution (10) aus. Wir finden wegen (12) und (14)

$$\frac{\partial F}{\partial y}(h_1, h_1 k_1 + z_1^{\varkappa} N_1) = A_*'' G(z_1, z_1 t_1) + B_*'' \frac{\partial G}{\partial z}(z_1, z_1 t_1) + C_*'' \frac{\partial G}{\partial t}(z_1, z_1 t_1),$$

wobei der Index $*$ bedeutet, daß die Substitution einzusetzen ist, und $N_1 \equiv 0$ $(\mathfrak{N}_1)$ ist. Nach (7), (8), (9) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} h_1^{r-1} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(h_1, k_1) &\equiv (A_*'' z_1 + r B_*'') z_1^{r-1} G_1 + B_*'' z_1^r \frac{\partial G_1}{\partial z_1} \\ &+ [C_*'' - t_1 B_*''] z_1^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial t_1} \end{aligned}\right\} (z_1^{\varkappa}\mathfrak{N}_1)$$

und daraus wegen (12) nach Division mit z_1^{r-1} und Multiplikation mit $\bar{\bar{h}}^{r-1}$, wo $\bar{h}\bar{\bar{h}} \equiv 1$ $(z_1^{\varkappa}\mathfrak{N}_1)$ ist, (die Existenz von $\bar{\bar{h}}$ folgt, weil analog wie oben $(z_1^{\varkappa}\mathfrak{M}_1, \bar{f})$ auch $(z_1^{\varkappa}\mathfrak{N}_1, \bar{h})$ der Einheitsmodul ist)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(h_1, k_1) &\equiv (A_*'' z_1 + r B_*'')\bar{\bar{h}}^{r-1} G_1 + z_1 B_*'' \bar{\bar{h}}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial z_1} \\ &+ (C_*'' - t_1 B_*'')\bar{\bar{h}}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial t_1} \end{aligned}\right\} (z_1^{\varkappa - r + 1}\mathfrak{N}_1), \tag{18}$$

also die Behauptung (15). Ganz analog finden wir

$$\left.\begin{aligned} z_1 F_1(h_1, k_1) &\equiv (A_* z_1 + r B_*)\bar{\bar{h}}^r G_1 + z_1 B_* \bar{\bar{h}}^r \frac{\partial G_1}{\partial z_1} \\ &+ (C_* - t_1 B_*)\bar{\bar{h}}^r \frac{\partial G_1}{\partial t_1} \end{aligned}\right\} (z_1^{\varkappa - r + 1}\mathfrak{N}_1), \tag{19}$$

also die Behauptung (16). Endlich ergibt sich

$$\begin{aligned} h_1^r \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(h_1, k_1) \equiv & -r h_1^{r-1} F_1(h_1, k_1) + k_1 h_1^{r-1} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(h_1, k_1) \\ & + (A'_* z_1 + r B'_*) z_1^{r-1} G_1 + z_1^r B'_* \frac{\partial G_1}{\partial z_1} + (C'_* - t_1 B'_*) z_1^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial t_1} \quad (z_1^{\varkappa} \mathfrak{N}_1), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (20) \quad z_1^2 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(h_1, k_1) \equiv & [(A'_* z_1^2 + r z_1 B'_*) + (k_1 z_1^2 A''_* + k_1 r z_1 B''_*) - (r A_* z_1 + r^2 B_*)\bar{\bar{h}}] \bar{\bar{h}}^r G_1 \\ & + [z_1^2 B'_* + k_1 z_1^2 B''_* - r z_1 B_* \bar{\bar{h}}] \bar{h}^r \frac{\partial G_1}{\partial z_1} \qquad (z_1^{\varkappa - r + 2} \mathfrak{N}_1) \\ & + [(z_1 C'_* - z_1 t_1 B'_*) + (k_1 z_1 C''_* - k_1 t_1 z_1 B''_*) - (r C_* - r t_1 B_*)\bar{\bar{h}}] \bar{\bar{h}}^r \frac{\partial G_1}{\partial t_1} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung (17). — Analoge Gleichungen ergeben sich für $G_1(h_1, k_1)$ usw.

Ehe wir nun zu der für den Isomorphiebeweis notwendigen Verschärfung dieser Relationen übergehen, *beweisen wir für* $\varkappa \geqq r - 1$ *und* $\varkappa \geqq 2$ *die zu* (4) *analogen Beziehungen*:

$$\begin{aligned} (21) \quad & f_1(h_1, k_1) \equiv z_1 \\ (22) \quad & g_1(h_1, k_1) \equiv t_1 \end{aligned} \quad (\mathfrak{N}_1), \qquad \begin{aligned} & h_1(f_1, g_1) \equiv x_1 \\ & k_1(f_1, g_1) \equiv y_1 \end{aligned} \quad (\mathfrak{M}_1).$$

Offenbar ist nämlich nach (4), (7) bis (9), (12) und (14)

$$f(h_1, h_1 k_1) \equiv z_1 \; (z_1^{r-1} \mathfrak{N}_1),$$

also gilt nach (11) die Behauptung (21), sogar mod $(z_1^{r-1} \mathfrak{N}_1)$. Ferner ist analog

$$\begin{aligned} g(h_1, h_1 k_1) &\equiv z_1 t_1 \; (z_1^{r-1} \mathfrak{N}_1), \\ h_1 \bar{g}(h_1, k_1) &\equiv z_1 t_1 \; (z_1^{r-1} \mathfrak{N}_1), \\ \bar{h}\, \bar{g}(h_1, k_1) &\equiv t_1 \; (z_1^{r-2} \mathfrak{N}_1). \end{aligned}$$

Nun ist nach (13) und (15), (16), (17)

$$\bar{g}(h_1, k_1) \equiv g_1(h_1, k_1) \bar{f}(h_1, k_1) \; (z_1^{\varkappa-2} \mathfrak{N}_1),$$

daher gilt

$$(23) \qquad g_1(h_1, k_1) \cdot \bar{f}(h_1, k_1) \bar{h} \equiv t_1 \; (\mathfrak{N}_1).$$

Andererseits ist wegen (11) und der mod $(z_1^{r-1} \mathfrak{N}_1)$ gültigen Kongruenz (21)

$$f_1(h_1, k_1) = h_1 \bar{f}(h_1, k_1) \equiv z_1 \; (z_1^{r-1} \mathfrak{N}_1),$$

also

$$\bar{h} \bar{f}(h_1, k_1) \equiv 1 \; (\mathfrak{N}_1).$$

Daher folgt aus (23) die Behauptung (22). — Ein Überblick über diese letzten Betrachtungen zeigt, daß durch genügend große Wahl von $\varkappa$

($\varkappa \geqq r + \mu$) die Koeffizienten von $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}$, $\frac{\partial G_1}{\partial z_1}$, $\frac{\partial G_1}{\partial t_1}$ in (21), (22) einen beliebig großen Untergrad μ erhalten können, wenn nur in (4) die entsprechenden Koeffizienten von $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial G}{\partial z}$, $\frac{\partial G}{\partial t}$ Polynome vom Untergrad $\geqq \mu$ sind.

§ 2.

Beweis der Isomorphie der abgeleiteten Singularitätengruppen für zwei Kurven mit isomorpher Restgruppe.

Wir kommen nun zu der Verschärfung der Relationen (16) und (17), die für den Isomorphiebeweis notwendig ist. Wir erreichen diese, indem wir jetzt außer den Voraussetzungen (1), (2), (3), die nur besagen, daß die *Singularitätengruppen* von F und G isomorph sind, noch gewisse Annahmen über die Koeffizientenpolynome in (1) und (4) einführen, die z. B. erfüllt sind, wenn die *Restgruppen* von F und G isomorph sind.

Zu diesem Ende sei eine ganze Zahl $\mu \geqq 2$ so gewählt, daß, für welchen Linearfaktor der Unterform von $F, F_1, \ldots$ auch die Auflösung durchgeführt werde, nach spätestens $\mu - 1$ Schritten ein regulärer Punkt der betreffenden Bildkurve erreicht, die Auflösung also vollendet ist, und daß Gleiches für G gilt. Eine solche Zahl μ gibt es wegen der Endlichkeit des Auflösungsprozesses; wir behalten uns aber ihre Vergrößerung noch vor. Wir wählen ferner stets $\varkappa \geqq r + \mu$. *Dann soll unsere Annahme jetzt die sein, daß die Polynome B, C, B und Γ in* (1) *und die entsprechenden Polynome in* (4) *sämtlich vom Untergrad $\geqq \mu$ seien*[3]). Wir werden dann für die konstanten Glieder $a_0, b_0', b_0'', c_0', c_0''$ von A, B', B'', C', C'' beweisen, daß $a_0 = b_0' = c_0''$, $b_0'' = c_0' = 0$ ist, und daß analoge Gleichungen für die Konstanten von A, B', B'', Γ', Γ'' gelten. Ist dies geschehen, so zeigt die Gleichung (19), daß der Faktor z_1 rechts und links fortgelassen werden kann, so daß sich

$$F_1(h_1, k_1) \equiv 0(\mathfrak{N}_1), \qquad G_1(f_1, g_1) \equiv 0(\mathfrak{M}_1)$$

ergibt. Ebenso ersieht man aus (20) wegen $\mu \geqq 2$, daß der Faktor z_1^2 rechts und links fortfallen kann, so daß auch

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(h_1, k_1) \equiv 0(\mathfrak{N}_1), \qquad \frac{\partial G_1}{\partial z_1}(f_1, g_1) \equiv 0(\mathfrak{M}_1)$$

wird. Damit ist aber die Isomorphie der Restgruppen von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{N}_1$ unter unsern Annahmen bewiesen.

Unsere Annahmen sind offenbar für jedes μ erfüllt für den Fall, daß die Restgruppen von F und G isomorph sind.

---

[3]) Es läßt sich unter den früheren Voraussetzungen *beweisen*, daß B und B vom Untergrad $\geqq 1$ sind. Dies genügt bereits zur Verschärfung von (16).

Zum Beweise der obigen Relationen differentiieren wir (1) und finden mod G bis auf Glieder $(\mu-1)$-ter und höherer Dimension

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x}(h,k)\begin{vmatrix} h_z & k_z \\ h_t & k_t \end{vmatrix} \equiv A\,k_t\dfrac{\partial G}{\partial z} - A\,k_z\dfrac{\partial G}{\partial t} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(h,k)\begin{vmatrix} h_z & k_z \\ h_t & k_t \end{vmatrix} \equiv A\,h_t\dfrac{\partial G}{\partial z} + A\,h_z\dfrac{\partial G}{\partial t} \end{array}\right\} (G,(\mu-1)).$$

Aus den Kongruenzen (4) findet man ferner durch Differentation für die Determinante $\begin{vmatrix} h_z & k_z \\ h_t & k_t \end{vmatrix}$ mod $(\mathfrak{R},(\mu-1))$ eine Reziproke R mit der Konstanten 1; daher gelten die Kongruenzen

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x}(h,k) \equiv A\,R\,k_t\dfrac{\partial G}{\partial z} - A\,R\,k_z\dfrac{\partial G}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial x}(h,k)\,N \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(h,k) \equiv -A\,R\,k_t\dfrac{\partial G}{\partial z} + A\,R\,h_z\dfrac{\partial G}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial y}(h,k)\,N \end{array}\right\} (G,(\mu-1)),$$

wobei $N\equiv 0(\mathfrak{R})$ ist. Ist nun μ hinreichend groß, so sind die Glieder $(\mu-1)$-ter und höherer Dimension $\equiv LQ(\mathfrak{R})$, wobei $(\mathfrak{R},Q)$ der zum Nullpunkt gehörende Primärteiler von $\mathfrak{R}$ und der Untergrad von L so groß ist, daß L selbst zu $(\mathfrak{R},Q)$ gehört. Aus (2), (3) folgt dann $LQ\equiv 0$ $(\mathfrak{R})$, und da Q in den vom Nullpunkte verschiedenen Singularitäten von G nicht verschwindet, so muß L zu den betreffenden Primärteilern gehören; also gehört L zu $\mathfrak{R}$. Beachtet man noch, daß Q vom Untergrad $\geqq 1$ ist, und schreibt die obigen Kongruenzen in der Form (2), (3), so zeigt sich, daß $b_0'=c_0''=a_0$, $b_0''=c_0'=0$ wird, also die Behauptung gilt.

Wir können nun aber auch leicht zeigen, daß bei genügend großen μ analoge Bedingungen wie für F und G, so auch für F_1 und G_1 gelten. Zunächst liefern (18), (19), (20) Gleichungen der Form

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} F_1(h_1,k_1) = A_1G_1 + B_1\dfrac{\partial G_1}{\partial z_1} + C_1\dfrac{\partial G_1}{\partial t_1}, \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(h_1,k_1) = A_1'G_1 + B_1'\dfrac{\partial G_1}{\partial z_1} + C_1'\dfrac{\partial G_1}{\partial t_1}, \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(h_1,k_1) = A_1''G_1 + B_1''\dfrac{\partial G_1}{\partial z_1} + C_1''\dfrac{\partial G_1}{\partial t_1}. \end{array}\right.$$

Die Polynome B_1, C_1 (und analog die entsprechenden B_1, Γ_1) sind nach (19) gewiß vom Untergrad $\geqq \mu-1$. Wählen wir nun μ von vornherein so groß, daß bei einer bestimmten Kette von abgeleiteten Singularitätengruppen die Zahl $\mu-1$ dieselbe Rolle für F_1 und G_1 spielt wie μ für F und G, so sieht man mit Hilfe der Schlußbemerkung von § 1, daß die beiden Bildkurven F_1 und G_1 wieder genau ebenso behandelt werden können wie F und G selbst und so fort, wodurch wir auf eine ganze Kette von paarweise isomorphen abgeleiteten Singularitätengruppen kommen.

Die Zahl μ muß dabei eventuell bei jedem Schritt von neuem erhöht werden; wegen der Endlichkeit gibt es aber ein μ, das für die ganze Kette ausreicht.

§ 3.

Das Verhalten der übrigen Singularitäten der Kurve bei der Auflösung. Der Hauptsatz.

Wir betrachten einen beliebigen vom Punkte $x = y = 0$ verschiedenen singulären Punkt P der Kurve $F = 0$; für diesen ist nach unserer Annahme $x \neq 0$. Die Gleichungen (7), (8), (9) zeigen dann, daß der entsprechende Punkt P_1 von F_1 ebenfalls singulär ist. Dem Punkte P entspricht ein gewisser Primärteiler $\mathfrak{P} = \left(F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, P(x, y)\right)$ von $\mathfrak{M}$, wobei $P(x, y)$ ein Polynom ist, das in den andern singulären Punkten, also auch im Nullpunkte, von Null verschieden ist. Analog bilden wir den zu P_1 gehörenden Primärteiler $\mathfrak{P}_1 = \left(F_1, \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, P_1(x_1, y_1)\right)$ *und behaupten nun die Isomorphie der Restgruppen von* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{P}_1$. Dies besagt alsdann, daß bei der Auflösung des einen singulären Punktes der singuläre Charakter der übrigen erhalten bleibt.

Zum Beweise haben wir die Existenz von Übergangspolynomen von $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{P}_1$ und umgekehrt zu zeigen. Für den Übergang von $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{P}_1$ benutzen wir die Substitution (6) und ersehen aus (7), (8), (9), daß die aus $F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ entstehenden Polynome zu $\mathfrak{P}_1$ gehören. Es gibt nun bekanntlich ein Polynom $Q(x, y)$, so daß $P + Q \equiv 1$, $PQ \equiv 0(\mathfrak{M})$. Setzen wir $P(x_1, x_1 y_1) = P_1'$, $Q(x_1, x_1 y_1) = Q_1'$, so folgt durch Einsetzen von (6) $P_1' + Q_1' \equiv 1$, $P_1' Q_1' \equiv 0(\mathfrak{M}_1)$; ferner ist $P_1' = 0$ im Punkte P_1, in den andern singulären Punkten $\neq 0$. Diese Bedingungen bestimmen nun aber die Restklasse von $P_1' \bmod \mathfrak{M}_1$ eindeutig, und da es auch für P_1 ein Q_1 gibt, so daß $P_1 + Q_1 \equiv 1$, $P_1 Q_1 \equiv 0(\mathfrak{M}_1)$ ist, so muß

$$P_1' \equiv P_1(\mathfrak{M}_1) \tag{25}$$

sein, also $P_1' \equiv 0(\mathfrak{P}_1)$.

Um nun zweitens die inversen Substitutionen zu bestimmen, bedenken wir, daß $(\mathfrak{P}, x)$ der Einheitsmodul ist, so daß die Kongruenz

$$x\varrho(x, y) \equiv 1(\mathfrak{P}) \tag{26}$$

eine Lösung besitzt. Setzen wir nun

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ y_1 &= y\varrho \end{aligned} \tag{27}$$

in $\mathfrak{P}_1$ ein, so wird nach (7) wegen (26)

$$\begin{aligned} x^r F_1(x, y\varrho) = F(x, xy\varrho) \equiv F(x, y) \equiv 0(\mathfrak{P}), \\ F_1(x, y\varrho) \equiv 0(\mathfrak{P}). \end{aligned} \tag{28}$$

Ebenso folgt aus (9)

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, y\varrho) \equiv 0(\mathfrak{P}) \tag{29}$$

und alsdann aus (8)

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x, y\varrho) \equiv 0(\mathfrak{P}). \tag{30}$$

Ferner ist nach (25), (28), (29), (30)

$$P_1(x, y\varrho) \equiv P_1'(x, y\varrho) = P(x, xy\varrho) \equiv P(x, y) \equiv 0(\mathfrak{P}).$$

Schließlich sind die Substitutionen (6) und (27) invers, da ja (26) gilt und die daraus abgeleitete Relation $x_1 \varrho(x_1, x_1 y_1) \equiv 1(\mathfrak{P}_1)$. Hiermit ist die Isomorphie bewiesen.

Wir sind nun auch imstande, den oben ausgeschlossenen Fall von lauter einfachen linearen Faktoren der Unterformen von F und G zu erledigen. Es ist ja klar, daß die Nullpunkte von F_1 und G_1 dann *reguläre* Punkte werden, die zur Singularitätengruppe überhaupt keinen Beitrag liefern; die Singularitätengruppen von F_1 und G_1 sind daher, wie wir jetzt sehen, auch in diesem Falle isomorph, und Entsprechendes gilt für irgendeine der späteren Stufen.

Wir sind also im ganzen zu folgendem Resultat gelangt:

Die Auflösung eines singulären Punktes P einer algebraischen Kurve $F = 0$ mittels quadratischer Cremonatransformationen der Form (6) *führt zu einer endlichen Anzahl von Bildkurven $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, ..., deren Singularitätengruppen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ der Restgruppe von F in dem Sinne zugeordnet sind, daß für eine Kurve $G = 0$ mit isomorpher Restgruppe die entsprechenden Bildkurven $G_1 = 0$, $G_2 = 0, \ldots$ Singularitätengruppen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ besitzen, die zu den Gruppen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ respektive isomorph sind. Dabei bleiben ferner die Bestandteile, die den anderweitigen Singularitäten von $F = 0$ bzw. $G = 0$ entsprechen, bei allen Abbildungen isomorph erhalten, so daß dem Punkte P selbst neben der zugehörigen einfachen Untergruppe der Singularitätengruppe $\mathfrak{A}$ von F die Kette der zugehörigen einfachen Untergruppen von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ als Charakteristikum der Singularität zugeordnet werden kann. Diese Charakterisierung der Singularität ist dann invariant gegenüber umkehrbar ganz rationalen Transformationen der Kurve.*

Alle Invarianten dieser Singularitätengruppen bleiben dann natürlich ebenfalls bei diesen Transformationen erhalten. Insbesondere folgt (vgl.

Satz V), daß die Vielfachheiten r_i der Nullpunkte in zwei entsprechenden Kurven F_i und G_i dieselben sein müssen. Diese Zahlen r_i definieren nach M. Noether bekanntlich die „Zusammensetzung" des singulären Punktes; es zeigt sich also, daß die obige Charakterisierung diese Zusammensetzung mit liefert. *Zugleich zeigt sich, daß diese Zahlen gegenüber beliebigen umkehrbar ganz rationalen Transformationen invariant sind.*

Wir wollen nun umgekehrt an einem Beispiel sehen, daß die Vielfachheiten übereinstimmen können, ohne daß die zugehörige Kette von Singularitätengruppen eindeutig bestimmt ist, so daß diese also eine tiefergehende Charakteristik liefert. Zu diesem Zwecke setzen wir $F(x, y) = y^r + H(x, y)$, wobei $H(x, y) = x^{r+1} + \ldots$ eine homogene Form $(r+1)$-ten Grades mit lauter verschiedenen Linearfaktoren ist. Letztere Bedingung hat zur Folge, daß die Kurve $F = 0$ von der unendlich fernen Geraden in n getrennten, also regulären Punkten getroffen wird[4]). Die einzige Singularität der Kurve ist dann der Nullpunkt, denn wegen $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = r y^{r-1} + \frac{\partial H}{\partial y}$ ist $H = -rF + y\frac{\partial F}{\partial y} + x\frac{\partial F}{\partial x}$ und damit $y^r \equiv 0(\mathfrak{M})$; also ist für eine Singularität $y = 0$, und damit $x = 0$.

Wir setzen nun

1. $H = x^{r+1} - y^{r+1}$, also $F = y^r + x^{r+1} - y^{r+1}$, was den Bedingungen genügt. Dann ist $y^{r-1} \equiv 0$, $x^r \equiv 0$ und alle Produkte $x^\alpha y^\beta$ $(\alpha \leqq r-1,\ \beta \leqq r-2)$ bilden eine Basis der Singularitätengruppe, *deren Ordnung demnach* $= r(r-1)$ *ist.*

2. $r = 5$ und $H = (x^4 - y^4)(x^2 - 2y^2) = x^6 - 2x^4y^2 - x^2y^4 + 2y^6$, also $F = y^5 + x^6 - 2x^4y^2 - x^2y^4 + 2y^6$, was ebenfalls den Bedingungen genügt. Wir behaupten wieder, daß alle Polynome durch die Potenzprodukte $x^\alpha y^\beta$ $(\alpha \leqq 4,\ \beta \leqq 3)$ nach $\mathfrak{M}$ linear dargestellt werden können. In der Tat sind wegen $\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 5y^4 - 4x^4y - 4x^2y^3$ die Potenz y^4 und wegen $x\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 5xy^4 - 4x^5y - 4x^3y^3$, $y\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 6x^5y - 8x^3y^3$, also $15xy^4 - 28x^3y^3 \equiv 0$ die Produkte xy^4 und x^5y durch jene Potenzprodukte darstellbar; wir sehen ferner, daß x^2y^4 ebenfalls darstellbar ist und $x^3y^4 \equiv 0$ wird. Aus $\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 6x^5 - 8x^3y^2 - 2xy^4$ folgt dann die Dar-

[4]) An sich ist eine Singularität der Kurve im Unendlichen von unserm Standpunkte aus belanglos. Es ist aber von Interesse, festzustellen, daß man überall, auch im Unendlichen, für zwei Kurven das gleiche Verhalten im Noetherschen Sinne vorschreiben kann, ohne damit die Singularitätengruppen eindeutig zu bestimmen. — Ich möchte hier mit besonderem Danke an Herrn Geheimrat Noether bemerken, daß ursprünglich im Text ein anderes Beispiel stand, in dem beide Kurven sich, wie mir Herr Noether mitteilte, durch ihr Verhalten im Unendlichen unterscheiden ließen. Daraufhin habe ich das Beispiel durch das obige ersetzt.

stellbarkeit von x^5, aus $x\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 6x^6 - 8x^4y^2 - 2x^2y^4$ diejenige von x^6. x^5y^3 wird $\equiv 0$ und x^6y wird wegen $H \equiv 0$ durch x^4y^3 allein darstellbar. Daher wird $x^6y^2 \equiv 0$ und ebenso $x^7 \equiv 0$, so daß alle Produkte 8-ter Dimension verschwinden. Die Behauptung ist damit bewiesen, die Ordnung also $\leqq r(r-1) = 20$. *Sie ist aber in Wirklichkeit* < 20, weil zwischen den 20 Potenzprodukten die Relation $5x^4y^2 + 12x^4y^3 \equiv 0$ besteht. In der Tat ist $6H - x\frac{\partial F}{\partial x} \equiv -4x^4y^2 - 4x^2y^4$, also $x^2y^4 + x^4y^2 \equiv 0$ und $x^2\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 5x^2y^4 - 4x^6y - 4x^4y^3$, oder $5x^4y^2 + 4x^6y + 4x^4y^3 \equiv 0$. Andererseits ist $4yH \equiv 4x^6y - 8x^4y^3 \equiv 0$, also durch Subtraktion $5x^4y^2 + 12x^4y^3 \equiv 0$.

Setzt man nun in 1. ebenfalls $r = 5$, so erhält man $F = y^5 + x^6 - y^6$, also eine Kurve, die ebenso wie in 2. im Nullpunkte eine gewöhnliche 5fache Spitze hat, so daß für beide Kurven schon die erste Bildkurve regulär wird. Die Vielfachheiten stimmen daher überein, die Singularitätengruppen sind aber nicht isomorph.

II. Abschnitt.

Verallgemeinerung auf beliebige eingliedrige Moduln mit endlicher Singularitätengruppe.

Wir denken uns ein Polynom in n Variablen $F(x_1 \ldots x_n)$ gegeben, so daß der Modul $\mathfrak{M} = \left(F, \frac{\partial F}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$ eine *endliche* Restgruppe, das Gebilde $F = 0$ also nur eine *endliche* Anzahl von singulären Stellen besitzt. Wir wollen den Hauptsatz auf diesen Fall verallgemeinern. Es wird genügen, die Rechnungen für $n = 3$ durchzuführen, da die weitere Verallgemeinerung auf der Hand liegen wird. Wir führen der Reihe nach die verallgemeinerten Formeln auf und erläutern sie durch Text nur da, wo es nötig zu sein scheint. Gegeben sind zwei Polynome $F(x, y, z)$ und $G(u, v, w)$.

$$(1)' \quad \begin{aligned} F(h, h', h'') &= AG + B\frac{\partial G}{\partial u} + C\frac{\partial G}{\partial v} + D\frac{\partial G}{\partial w}, \\ G(f, f', f'') &= \mathsf{A}F + \mathsf{B}\frac{\partial F}{\partial x} + \Gamma\frac{\partial F}{\partial y} + \Delta\frac{\partial F}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$(2)' \quad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(h, h', h'') &= A'G + B'\frac{\partial G}{\partial u} + C'\frac{\partial G}{\partial v} + D'\frac{\partial G}{\partial w}, \\ \frac{\partial G}{\partial u}(f, f', f'') &= \mathsf{A}'F + \mathsf{B}'\frac{\partial F}{\partial x} + \Gamma'\frac{\partial F}{\partial y} + \Delta'\frac{\partial F}{\partial z}, \end{aligned}$$

(3)' usw.

$$(4)' \quad \begin{cases} f(h, h', h'') \equiv u, & h(f, f', f'') \equiv x, \\ f'(h, h', h'') \equiv v \quad (\mathfrak{N}), & h'(f, f', f'') \equiv y \quad (\mathfrak{M}), \\ f''(h, h', h'') \equiv w, & h''(f, f', f'') \equiv z, \end{cases}$$

$$(5)' \quad \begin{cases} f = x + (2), & h = u + (2), \\ f' = y + (2), & h' = v + (2), \\ f'' = z + (2), & h'' = w + (2). \end{cases}$$

Es seien wieder die Nullpunkte zugeordnete Singularitäten der gemeinsamen Vielfachheit r. Es liege weder auf $x = 0$ noch auf $u = 0$ ein vom Nullpunkte verschiedener singulärer Punkt von F bzw. G.

$$(6)' \quad \begin{cases} x = x_1, \\ y = (c + y_1) x_1, \\ z = (d + z_1) x_1, \end{cases}$$

$$(7)' \quad F(x_1, (c + y_1) x_1, (d + z_1) x_1) = x_1^r F_1(x_1, y_1, z_1),$$

$$(8)' \quad \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, (c + y_1) x_1, (d + z_1) x_1) \\ &= r x_1^{r-1} F_1 + x_1^r \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - x_1^{r-1}(c + y_1) \frac{\partial F_1}{\partial y_1} - x_1^{r-1}(d + z_1) \frac{\partial F_1}{\partial z_1}, \end{aligned}$$

$$(9)' \quad \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, (c + y_1) x_1, (d + z_1) x_1) = x_1^{r-1} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \\ &\frac{\partial F}{\partial z}(x_1, (c + y_1) x_1, (d + z_1) x_1) = x_1^{r-1} \frac{\partial F_1}{\partial z_1}. \end{aligned}$$

Die Konstanten c und d sind an sich willkürlich. Da aber $F = F^{(r)} + (r+1)$ und

$$F_1(x_1, y_1, z_1) = F^{(r)}(1, c, d) + \frac{\partial F^{(r)}}{\partial y}(1, c, d) y_1 + \frac{\partial F^{(r)}}{\partial z}(1, c, d) z_1 + x_1(\ldots) + (2)$$

ist, so ist nur der Fall von Interesse, daß neben $F^{(r)}(1, c, d) = 0$ auch $\frac{\partial F^{(r)}}{\partial y}(1, c, d) = 0$, $\frac{\partial F^{(r)}}{\partial z}(1, c, d) = 0$ ist; d. h. der Punkt $1, c, d$ muß auf einem *Doppelstrahl* des Tangentialkegels $F^{(r)} = 0$ von F im Nullpunkte liegen. Gibt es keinen solchen, so führt die Auflösung schon beim ersten Schritt zu einem regulären Bildpunkte; diesen Fall schließen wir zunächst aus. Wenn wir nun die analogen Prozesse mit G vornehmen, so ist dem Strahl $x : y : z = 1 : c : d$ der Strahl $u : v : w = 1 : c : d$ eindeutig zugeordnet und ist ebenfalls ein Doppelstrahl von $G^{(r)}$. Es gelten also die Formeln $(6)'$ bis $(9)'$ ganz analog auch für G. Wir nehmen ferner ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c = d = 0$ an, setzen also

$$(10)' \quad \begin{cases} u = u_1, \\ v = v_1 u_1, \\ w = w_1 u_1, \end{cases}$$

$$(11)' \quad \begin{cases} f(x_1, x_1 y_1, x_1 z_1) = x_1 \bar{f}(x_1, y_1, z_1) = f_1(x_1, y_1, z_1); \\ f'(x_1, x_1 y_1, x_1 z_1) = x_1 \bar{f}'(x_1, y_1, z_1); \\ f''(x_1, x_1 y_1, x_1 z_1) = x_1 \bar{f}''(x_1, y_1, z_1); \end{cases}$$

$$(12)' \quad \begin{cases} h(u_1, u_1 v_1, u_1 w_1) = u_1 \bar{h}(u_1, v_1, w_1) = h_1(u_1, v_1, w_1); \\ h'(u_1, u_1 v_1, u_1 w_1) = u_1 \bar{h}'(u_1, v_1, w_1); \\ h''(u_1, u_1 v_1, u_1 w_1) = u_1 \bar{h}''(u_1, v_1, w_1). \end{cases}$$

Wir definieren ferner f_1', f_1'' durch die Kongruenzen

$$(13)' \quad \begin{matrix} \bar{f}' \equiv f_1' \bar{f} \\ \bar{f}'' \equiv f_1'' \bar{f} \end{matrix} \; (x_1^{\varkappa} \mathfrak{M}_1), \qquad \mathfrak{M}_1 = \left(F_1, \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\right).$$

Die Lösbarkeit beider Kongruenzen für jedes $\varkappa$ beweist man analog wie oben. Ebenso sei:

$$(14)' \quad \begin{matrix} \bar{h}' \equiv h_1' \bar{h} \\ \bar{h}'' \equiv h_1'' \bar{h} \end{matrix} \; (u_1^{\varkappa} \mathfrak{N}_1), \qquad \mathfrak{N}_1 = \left(G_1, \frac{\partial G_1}{\partial u_1}, \frac{\partial G_1}{\partial v_1}, \frac{\partial G_1}{\partial w_1}\right).$$

Dann gilt für $\varkappa \leqq r - 1$

$$\begin{array}{ll} (15)' & \left.\begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(h_1, h_1', h_1'') \equiv 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial z_1}(h_1, h_1', h_1'') \equiv 0 \end{array}\right. \\ (16)' & u_1 F_1(h_1, h_1', h_1'') \equiv 0 \\ (17)' & u_1^2 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(h_1, h_1', h_1'') \equiv 0 \end{array} \Bigg\} (\mathfrak{N}_1), \qquad \begin{array}{l} \frac{\partial G_1}{\partial v_1}(f_1, f_1', f_1'') \equiv 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial w_1}(f_1, f_1', f_1'') \equiv 0 \\ x_1 G_1(f_1, f_1', f_1'') \equiv 0 \\ x_1^2 \frac{\partial G_1}{\partial u_1}(f_1, f_1', f_1'') \equiv 0 \end{array} \Bigg\} (\mathfrak{M}_1).$$

Ausführlicher geschrieben findet man:

$$(18)' \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(h_1, h_1', h_1'') \equiv (A_*'' u_1 + r B_*'') \bar{\bar{h}}^{r-1} G_1 + u_1 B_*'' \bar{\bar{h}}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial u_1} \\ \qquad + (C_*'' - v_1 B_*'') \bar{\bar{h}}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial v_1} + (D_*'' - w_1 B_*'') \bar{\bar{h}}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial w_1} \quad (u_1^{\varkappa - r + 1} \mathfrak{N}_1), \\ \frac{\partial F_1}{\partial z_1}(h_1, h_1', h_1'') \equiv (A_*''' u_1 + r B_*''') \bar{\bar{h}}^{r-1} G_1 + u_1 B_*''' \bar{\bar{h}}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial u_1} \\ \qquad + (C_*''' - v_1 B_*''') \bar{\bar{h}}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial v_1} + (D_*''' - w_1 B_*''') \bar{\bar{h}}^{r-1} \frac{\partial G_1}{\partial w_1} \quad (u_1^{\varkappa - r + 1} \mathfrak{N}_1); \end{cases}$$

$$(19)' \quad \begin{aligned} u_1 F_1(h_1, h_1', h_1'') &\equiv (A_* u_1 + r B_*) \bar{\bar{h}}^r G_1 + u_1 B_* \bar{\bar{h}}^r \frac{\partial G_1}{\partial u_1} \\ &\quad + (C_* - v_1 B_*) \bar{\bar{h}}^r \frac{\partial G_1}{\partial v_1} + (D_* - w_1 B_*) \bar{\bar{h}}^r \frac{\partial G_1}{\partial w_1} \quad (u_1^{\varkappa - r + 1} \mathfrak{N}_1). \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet A_* usw. das Polynom $A(u_1, v_1 u_1, w_1 u_1)$ usw., $\bar{\bar{h}}$ eine Lösung von $\bar{h}\bar{\bar{h}} \equiv 1 \, (u_1^{\varkappa} \mathfrak{N}_1)$. Ferner gilt:

$$(20)'\quad \left\{\begin{aligned} u_1^2\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(h_1, h_1', h_1'') \equiv {} & [(A_*'u_1 + rB_*')u_1 + (A_*''u_1 + rB_*'')h_1'u_1 \\ & + (A_*'''u_1 + rB_*''')h_1''u_1 - (A_*u_1 + rB_*)r\bar{\bar{h}}]\bar{\bar{h}}^{r}G_1 \\ & + [u_1B_*' + h_1'u_1B_*'' + h_1''u_1B_*''' - r\bar{\bar{h}}B_*]u_1\bar{\bar{h}}^{r}\frac{\partial G_1}{\partial u_1} \\ & + [(C_*' - v_1B_*')u_1 + (C_*'' - v_1B_*'')h_1'u_1 \\ & + (C_*''' - v_1B_*''')h_1''u_1 - (C_* - v_1B_*)r\bar{\bar{h}}]\bar{\bar{h}}^{r}\frac{\partial G_1}{\partial v_1} \\ & + [(D_*' - w_1B_*')u_1 + (D_*'' - w_1B_*'')h_1'u_1 \\ & + (D_*''' - w_1B_*''')h_1''u_1 - (D_* - w_1B_*)r\bar{\bar{h}}]\bar{\bar{h}}^{r}\frac{\partial G_1}{\partial w_1} \\ & \qquad (u_1^{\varkappa-r+2}\mathfrak{N}_1); \end{aligned}\right.$$

$$(21)'\qquad f_1(h_1, h_1', h_1'') \equiv u_1 \qquad h_1(f_1, f_1', f_1'') \equiv x_1$$

$$(22)'\qquad \begin{aligned} f_1'(h_1, h_1', h_1'') &\equiv v_1\ (\mathfrak{N}_1), & h_1'(f_1, f_1', f_1'') &\equiv y_1\ (\mathfrak{M}_1). \\ f_1''(h_1, h_1', h_1'') &\equiv w_1 & h_1''(f_1, f_1', f_1'') &\equiv z_1 \end{aligned}$$

In den letzten Gleichungen (21)′ und (22)′ werden die Koeffizienten von $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial G_1}{\partial w_1}$ sämtlich vom Untergrad $\geqq \mu$, wenn $\varkappa \geqq r + \mu$ ist und in (4)′ die entsprechenden Polynome vom Untergrad $\geqq \mu$ sind.

Für den Beweis der Isomorphie brauchen wir jetzt den Nachweis, daß das Auflösungsverfahren nach einer endlichen Anzahl von Schritten abbricht; es wird sogar eine Zahl μ geben, so daß für *jeden* der i. a. kontinuierlich vielen Doppelstrahlen das Auflösungsverfahren nach spätestens $\mu - 1$ Schritten abbricht. Diesen Nachweis verschieben wir auf später. Hat μ für G dieselbe Bedeutung, *so setzen wir $\varkappa \geqq r + \mu$ und machen jetzt die Annahme, daß $B, C, D, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta$ sowie die entsprechenden Polynome in* (4)′ *sämtlich vom Untergrade $\geqq \mu \geqq 2$ seien.* Wir werden dann für die Konstanten $a_0, b_0', b_0'', b_0''', c_0', c_0'', c_0''', d_0', d_0'', d_0'''$ von $A \ldots D'''$ die Beziehungen $a_0 = b_0' = c_0'' = d_0'''$, $b_0'' = b_0''' = c_0' = c_0''' = d_0' = d_0'' = 0$ beweisen, und analoge Gleichungen für die Konstanten von $A, \ldots, \Delta'''$. Dann zeigt (19)′, daß rechts und links der Faktor u_1, und (20)′, daß rechts und links der Faktor u_1^2 fortgelassen werden kann. *Damit ist die Isomorphie der Singularitätengruppen von F_1 und G_1 unter unseren Annahmen bewiesen.*

Diese Annahmen sind erfüllt für den Fall, daß die Restgruppen von F und G isomorph sind.

Zum Beweise der Behauptungen über die Konstanten differentiieren wir (1) und finden bis auf Glieder $(\mu - 1)$-ter und höherer Dimension.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(h, h', h'')\begin{vmatrix} h_u & h'_u & h''_u \\ h_v & h'_v & h''_v \\ h_w & h'_w & h''_w \end{vmatrix} \equiv A\begin{vmatrix} h'_v & h''_v \\ h'_w & h''_w \end{vmatrix} G_u + A\begin{vmatrix} h'_w & h''_w \\ h'_u & h''_u \end{vmatrix} G_v + A\begin{vmatrix} h'_u & h''_u \\ h'_v & h''_v \end{vmatrix} G_w$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(h, h', h'')\begin{vmatrix} h_u & h'_u & h''_u \\ h_v & h'_v & h''_v \\ h_w & h'_w & h''_w \end{vmatrix} \equiv A\begin{vmatrix} h''_v & h_v \\ h''_w & h_w \end{vmatrix} G_u + A\begin{vmatrix} h''_w & h_w \\ h''_u & h_u \end{vmatrix} G_v + A\begin{vmatrix} h''_u & h_u \\ h''_v & h_v \end{vmatrix} G_w \quad (G, (\mu-1))$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(h, h', h'')\begin{vmatrix} h_u & h'_u & h''_u \\ h_v & h'_v & h''_v \\ h_w & h'_w & h''_w \end{vmatrix} \equiv A\begin{vmatrix} h_v & h'_v \\ h_w & h'_w \end{vmatrix} G_u + A\begin{vmatrix} h_w & h'_w \\ h_u & h'_u \end{vmatrix} G_v + A\begin{vmatrix} h_u & h'_u \\ h_v & h'_v \end{vmatrix} G_w$$

Aus $(4)'$ folgt die Existenz eines Polynoms R, so daß

$$R\begin{vmatrix} h_u & h'_u & h''_u \\ h_v & h_v & h''_v \\ h_w & h'_w & h''_w \end{vmatrix} \equiv 1 \quad (\mathfrak{R}, (\mu-1))$$

ist, woraus sich die Konstante von R zu 1 bestimmt. Dann sieht man ebenso wie früher ein, daß man die obigen Gleichungen in der Form $(2)'$, $(3)'$ schreiben kann, und daß dabei die Bedingungen für die Konstanten $a_0 \ldots$ sämtlich erfüllt sind.

Analog wie oben zeigt man ferner, daß für F_1 und G_1 genau dieselben Bedingungen erfüllt sind wie für F und G, und daher der Isomorphiebeweis auch auf die zweite Stufe fortgesetzt werden kann usw. Wegen der Endlichkeit jeder einzelnen Kette gibt es stets ein μ, das den Beweis bis zur letzten Stufe durchzuführen gestattet.

Die Überlegungen des § 3 übertragen sich ohne weiteres auf den vorliegenden Fall, da die Darstellung des Singularitätenmoduls als kleinstes gemeinsames Vielfaches von teilerfremden Primärteilern unabhängig von der Variablenzahl gilt. Der Charakter eines vom Nullpunkte verschiedenen singulären Punktes wird also bei der Auflösung des Nullpunktes nicht modifiziert. Dies liefert ferner auch für die oben ausgeschlossenen Fälle, in denen der Bildpunkt *regulär* ist, die Isomorphie, so daß diese jetzt unter allen Umständen nachgewiesen ist.

Wir kommen nun noch zu dem Nachweis, daß das Verfahren nach einer beschränkten Anzahl von Schritten abbricht[8]).

Um dies zu zeigen, betrachten wir ein Polynom S etwa in x allein, das für alle singulären Punkte verschwindet und zwar je in solcher Vielfachheit, daß es zum Modul $\mathfrak{M} = (F, F_x, F_y, F_z)$ gehört. Es genügt

[8]) Das Folgende schließt an die Darstellung für zwei Variable bei Weierstraß, Werke 4, Kap. 1, an.

dazu gewiß, wenn die betreffende Vielfachheit gleich der Ordnung des zugehörigen einfachen Bestandteils der Singularitätengruppe ist. Insbesondere sei $S = x^\lambda S_0$, wobei $S_0(0) \neq 0$ ist. *Dann wollen wir zeigen, daß die Anzahl der Schritte, die bis zur völligen Auflösung, also bis zu regulären Bildpunkten führen, stets* $\leqq \lambda(r-1)$ *ist.*

Zu diesem Zwecke beachten wir folgendes: Wenn gezeigt werden kann, daß die Untergrade $r, r_1, \ldots$ stets nach höchstens λ Schritten um mindestens 1 abgenommen haben müssen, so ist die Behauptung bewiesen. Die aufeinanderfolgenden Substitutionen sind alle von der Gestalt $(6)'$ bzw. lineare Kombinationen davon. Liegt nun eine Folge von solchen Substitutionen vor, so können wir die Bezeichnungsweise so wählen, daß die erste Substitution

$$\begin{aligned} x &= (g + \ldots)x_1 \\ y &= (h + \ldots)x_1 \\ z &= (k + \ldots)x_1 \end{aligned}$$

wird, wo die Konstanten $g, h, k \neq 0$ sind. Ebenso kann erreicht werden, daß in allen folgenden Substitutionen

$$x_1 = (g_1 + \ldots)x_2, \quad x_2 = (g_2 + \ldots)x_3, \ldots, \quad x_{\varrho-1} = (g_{\varrho-1} + \ldots)x_\varrho$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$g_1, g_2, \ldots, g_{\varrho-1} \neq 0$ ist. Dann wird

$$\begin{aligned} x &= (g g_1 \ldots g_{\varrho-1} + \ldots)x_\varrho, \\ y &= (h g_1 \ldots g_{\varrho-1} + \ldots)x_\varrho, \\ z &= (k g_1 \ldots g_{\varrho-1} + \ldots)x_\varrho, \end{aligned}$$

so daß wir durch Einsetzen in $S(x)$ finden

$$S(x) = x_\varrho^\lambda S_\varrho(x_\varrho, y_\varrho, z_\varrho).$$

Andererseits ist $S = PF + QF_x + TF_y + UF_z$; aus dieser Darstellung folgt mit Hilfe von $(7)', (8)', (9)'$, wenn bei allen ϱ Schritten der Untergrad r erhalten bleibt, daß S durch x_1^{r-1}, durch $x_2^{2(r-1)} \ldots$ durch $x_\varrho^{\varrho(r-1)}$ teilbar ist. Also ist $\varrho(r-1) \leqq \lambda$ d. h. a fortiori $\varrho \leqq \lambda$. — Es ist klar, daß dieser Beweis sich unverändert auf den Fall von n Variablen überträgt.

Überblicken wir nun noch einmal die Beweise dieses Abschnitts, so tritt deutlich hervor, daß in allen die Anzahl 3 der Variablen unwesentlich ist und durch n ersetzt werden kann. Eine Variable ist davon bei den Beweisen durchgängig ausgezeichnet, die andern sind gleichberechtigt. Wir erhalten folgendes allgemeine Resultat:

Die Auflösung eines singulären Punktes P einer $(n-1)$*-dimensionalen algebraischen Fläche* $F = 0$ *mit endlich vielen Singularitäten im* n*-dimensionalen Raum mit Hilfe gewisser quadratischer Cremonatransformationen*

führt bei jedem der i. a. unendlich vielen möglichen Arten des Verfahrens auf eine beschränkte Anzahl von Bildflächen $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots$, *deren Singularitätengruppen* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ *der Restgruppe von F in dem Sinne zugeordnet werden können, daß für eine Fläche* $G = 0$ *mit isomorpher Restgruppe das analoge Verfahren auf Bildflächen* $G_1 = 0$, $G_2 = 0, \ldots$ *führt, die respektive Singularitätengruppen* $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ *besitzen, von denen* $\mathfrak{A}_i$ *zu* $\mathfrak{B}_i$ *isomorph ist. Dabei bleiben ferner die Bestandteile der Singularitätengruppen, die den anderweitigen Singularitäten von* $F = 0$ *bzw.* $G = 0$ *entsprechen, bei allen Abbildungen isomorph erhalten, so daß dem Punkte P selbst neben der zugehörigen einfachen Untergruppe der Singularitätengruppe* $\mathfrak{A}$ *von F alle Ketten der einfachen Untergruppen von* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ *als Charakteristikum der Singularität zugeordnet werden können. Diese Charakterisierung ist dann invariant gegenüber umkehrbar ganz rationalen Transformationen von* $F = 0$.

Speziell sind natürlich auch hier wieder die Untergrade der Bildflächen Invarianten gegenüber solchen Transformationen.

Kiel, den 15. Januar 1921.

(Eingegangen am 27. 1. 1921.)